מכתבי אהבה *למתמטיקה*

משה *קליין*

יוני 2007
ניתן לרכוש את הספר
דרך גן אדם
ת.ד 5024 טבעון
049535339

www.makom.org.il/ganadam

אדם עושה מתמטיקה, עושה אדם

ספרו של משה קליין – **מכתבי אהבה למתמטיקה** נכתב בגישה יוצאת דופן המציבה נקודת מבט סובייקטיבית של אדם במרכז העשייה המתמטית. הכותב ואתו הקורא נקראים להרפתקה של סוגיות מתמטיות שכל אחת מהן היא כמו מכתב ודיאלוג בין אמת אובייקטיבית לבין האמת הפרטית של האדם.

אין מתאים מספר זה להצבת יד למורה המחנך, **עקיבא סקידל**, "מלך המתמטיקה" עבור מאות תלמידים בבית-החינוך האזורי **עמק החולה**, שאותו הקים ובו פעל כ30- שנה בקיבוצו **כפר בלום**.

מי היו המורים של שנות החמישים והשישים בעיני התלמידים? מה היו המורים בעיני עצמם? מה נהיה אנחנו בעיני תלמידנו? ומה היינו רוצים שהמורים של היום יהיו עבור ילדינו?

עקיבא עשה עימי חסד בכך שזכיתי לראותו כתלמיד וגם לעבוד במחיצתו כמורה. המורים של אז היו בעינינו, התלמידים, החלון הבלעדי כמעט, אל התרבות. לא הייתה אז עדיין טלוויזיה, ברדיו שמענו רק את מצעד הפזמונים מ"קול רמאללה" ועיתונים כמעט לא קראנו. כך שכל עולמנו הרוחני התמצה בזרימה חד-כיוונית של מידע, ידע וערכים מהמורים אלינו.

עקיבא היה עולם מלא, איש רב-ממדי. ממוזיקה ואמנות דרך לשון והיסטוריה אל המתמטיקה. עד כיתה ט' לא ידעתי מה זו מתמטיקה. למדנו רק חשבון. תרגילים, תרגילים ועוד תרגילים. בכיתה ח' נבחנו במבחני הסקר הנודעים על אחוזים וריבית דריבית. אצל עקיבא נגלה לנו עולם חדש. נפגשנו במושגים כמו הסתברות, קומבינטוריקה, קבוצות וחשבון מודולרי. לב העניין היה הישויות המתמטיות, המבנים והקשרים ביניהם. לא טכניקה, אלא תורה. לא רק תרגול, אלא חשיבה והבנה.

האלמנט המרכזי בהוראה של עקיבא היה החתירה אל הבלתי נודע ואל הבלתי צפוי, כשהם מבוססים על מבנה לוגי מוצק ויציב. את הביטחון העצמי היה משיג בטכניקות ובתרגול ואת הסקרנות היה מפרנס בחידות. עקיבא היה נוקשה מאוד. את הלוגיקה הפורמלית חידד אצלנו באמצעות גאומטריה אויקלידית. ואם אמרנו: "הרי רואים ששני הישרים הללו מקבילים", היה עונה במשפט המפתח שלו: **ראיתי אינה ראיה** (יש לנקד את המשפט הזה). כאן נדרשת הוכחה.

בשני העשורים הראשונים של בית הספר הורה עקיבא מתוך עותק מרופט של ספר גאומטריה, אשר נמצא צהוב ומרופט בעיזבונו. זה היה ספר הטירונות המתמטית. מי שעבר אותו בשלום, יכול היה להסתובב בתחושת גאווה "יכולתי לה, לגאומטריה". לא רק אינטואיציה, "כזה כאילו" ו"בערך", אלא משנה סדורה. אויקלידס היה הטרמפ למשמעת פנימית

חמורה: אקסיומות, הגדרות, משפטים, הוכחות. אני זוכר עד היום כיצד הצצתי בספר הקדוש. אז הייתי בטוח שספר זה חובר בידי אויקלידס בכבודו ובעצמו. והנה בזהירות, בעיפרון, בכתב-יד קטן ומסודר, בשולי העמודים, עקיבא מתקן את אויקלידס. איזו עוצמה הייתה לתחושה זו.

האם אהבנו את שיעוריו של עקיבא? הוא היה חכם מאוד, אך עם זאת מעורר אימה. לא תמיד הקשבנו, לעתים הצצנו מבעד לחלון אל החרמון המושלג ואל הגשם. התבשמנו ביחסי חברות, בניצני נעורים. העברנו פתקים משולחן לשולחן, צחקנו וצחקקנו. עקיבא היה נעלב עד עומק נפשו. בשם המתמטיקה, כמובן. משנכנס עקיבא לכיתה ומצא על הרצפה נייר זרוק או קליפת תפוז, היה הטיח נופל מהתקרה מעוצמת שאגתו. אז היה מתכופף, מרים את הניירות בעצמו ואומר: "אין כל פחיתות כבוד בהרמת נייר. כשאהיה זקן ולא אוכל עוד ללמד, אקח מקל ובקצהו מסמר ואאסוף בעזרתו את כל מה שחברים זורקים בחצר הקיבוץ".

עקיבא לא היה טכנאי הוראה. באופיו היה נביא של הוראת המתמטיקה. היה שותף של פרופ' משלר בפיתוח תכנית לימודים חדשה לכיתות ז'-ח'. במקום אחוזים וריבית דריבית, למדו תורת המספרים, חבורות, חוגים ושדות. אצל עקיבא הכינו התלמידים עבודות גמר במתמטיקה.

כשחזרתי לבית-הספר כמורה היה עקיבא עדיין בשיאו, אם כי מאוכזב מהמורים החדשים. כבר אז נשבו רוחות חדשות. לא החומר הנלמד, אלא התלמיד במרכז. עקיבא הנהיג מפגשי צוות קבועים. היינו נפגשים כל שבוע לעיסוק בצומת שבו נפגשות המתמטיקה והפדגוגיה.

המחסום העיקרי בהוראת מתמטיקה הוא הביטחון העצמי של התלמיד (ושל המורה). היכולת להתמודד עם מצבים בלתי צפויים ועם שאלות שאינן טכניות. את הביטחון העצמי של התלמיד בונים אט-אט, בהרבה אמון ואימון, בהרבה סבלנות, בתרגול ובטכניקה. כשהתרגילים דומים זה לזה, נצברת הצלחה להצלחה וגובר הביטחון. המורה נדרש לחפש דווקא את השוני. מהדוגמה עליו להוביל את תלמידיו אל ההכללה. השאלה "האם זה נכון ש...?" מוחלפת בשאלה "מתי זה נכון ש...?" ומתי זה לא נכון?", "באילו נתונים זה בכלל לא יוכל להתקיים?"

התרגילים הופכים לבעיות, והבעיות לשאלות ערכיות ולסוגיות קיומיות. המתמטיקה מחלחלת ללשון, ומשם להיסטוריה ומשם לתרבות ומשם לחיי אדם.

כך עשה עקיבא מתמטיקה, וכך עשה עקיבא בני-אדם.

אמנון ארבל

דברי פתיחה

הספר "מכתבי אהבה למתמטיקה" הוא תיאור של מסע אישי, המנסה באמצעות התבוננות ותיאור מקרים לגלות קשר בין האדם למתמטיקה שהוא יוצר. הספר פותח בתיאור של תלמיד תיכון ממושמע, שברגע של אי -נחת מסוימת צועק בקול רם בכיתה "נעליים", ובכך הוא מבטא מרד מסוים כנגד האופן השיטתי, שבו מוצגת בדרך- כלל המתמטיקה. מכתבים אלו כוללים נושאי התבוננות רבים. אשר מבטאים חיפוש אחר מהות אחת אורגנית, אשר מאחדת את תחומי היצירה של המתמטיקה.

כל אחד מהתיאורים הללו מופיע בעמוד נפרד שעומד בפני עצמו. העדר קשר לינארי או לוגי בין העמודים מבטא שהמתמטיקה היא לוגית בדרך ההצגה שלה במאמרים ובספרים, אבל לא בדרך אשר בה היא נוצרת באמת.

המכתבים כוללים את הנושאים הבאים :

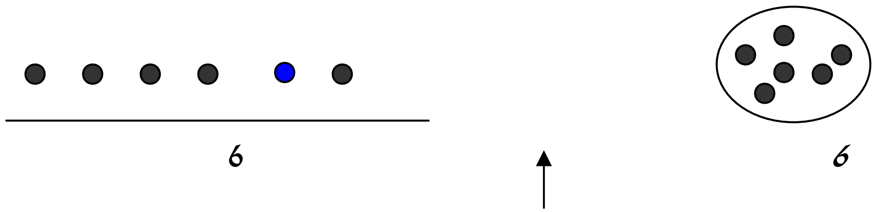
שיעור מתמטיקה הנערך ללא דיבור מעורר תהייה על השימוש, שנעשה בשפה רגילה לצורך לימוד המתמטיקה; ההוכחה המתמטית המפורסמת של אוילר על קיומו של אלוהים מקבלת את הסברה השלם תוך התבוננות על רגעי ההוכחה; ביקור דמיוני של יצור ממאדים שמנסה להבין את היראה הרבה שיש כלפי מתמטיקה בכדור הארץ; אדם שמתהלך בספרייה מתמטית ומנסה לבחון את הממדים השונים שלה; רשימה של בעיות פתוחות במתמטיקה אשר ניסוחן קל יחסית; התבוננות נוספת במשפט פיתגורס מפיקה בעיות מתמטיות רבות; תגלית מתמטית על פעולת חשבון חדשה בין שני מספרים; חיפוש אחר מהות נשית ביצירה המתמטית; התבוננות על המתמטיקה דרך מתמטיקאים מופלאים כמו גלואה ורמנוג'ן; מחקר סטטיסטי של טקסט החוקר את עצמו; הרחבה למשפטים של התייחסות עצמית כפי שהשתמש בהם המתמטיקאי קורט גדל; התבוננות על כוכב הלכת צדק ביחס למציאת חוק טבע סופי ומוחלט; ניסוח של עקרון שימור אי הידיעה; חיפוש אחר משמעות מתמטית שיש למילים בעברית מלבד הערך הגימטרי שלהם; התבוננות על הגישה שאותה פיתח פליקס קליין לגאומטריה וניסיון להרחיבה לתחומי מתמטיקה נוספים; תאור הבניה של מכשיר הצפנה אוניברסלי; ולסיום תאור מסע לארצות-הברית מאה שנים מהרצאתו המפורסמת של הילברט בפריס בשנת 1900

כל עמוד הוא תיאור של הבנות וגילויים מתמטיים אבל מצד שני הוא גם דרך להתבונן על המתמטיקה עצמה. בדרך זו מודגשת הדו משמעיות של כל סימול המתמטי. כל סמל מתמטי מייצג דבר, אך מצד שני הוא אובייקט מתמטי העומד בפני עצמו. הייחוד האמיתי של המתמטיקה אינו בכך שהיא אמת מוחלטת אלא בכך שהיא כל כולה עולם של סמלים ללא צורך במציאות. אמנם בתחילה אותם סמלים מתייחסים לעולם כמו לדוגמא מספרים המונים עצמים בעולם. אבל מהר מאוד הסמלים המתמטיים הופכים לעצמים, שהם לגיטימיים בפני עצמם, ויש להם חיים עצמאיים ללא ממשות.

עלינו להסביר את התחושה הקיימת בכל זאת, שהגילויים המתמטיים הם מוחלטים. כדי למצוא את ההסבר לכך עלינו לוותר על ההנחה שגילויים מתמטיים הם על העולם מחוץ לסמלים, וגם על ההנחה שהם גילויים מחוץ לעולם הסמלים. אמת פשוטה הקשה לתפיסה היא שכל הגילויים המתמטיים נמצאים בתוך עולם של סמלים. כולם נובעים לא באופן לוגי אלא באופן אורגני וצומח מתוך אמת פשוטה שיש על מספרים.

משפט מפורסם המיוחס לפיתגורס נולד בעקבות תגליתו על קשר בין מתמטיקה להרמוניות מוזיקליות. פיתגורס קבע אז כי "הכול מספר", ובכך ביטא אמונה עמוקה שכשם שניתן להבין הרמוניות מוזיקליות באמצעות מספרים, כך אפשר להבין את העולם כולו באמצעות הבנה עמוקה של מספרים. לאמירה זו הייתה השפעה על השאיפה לבסס את הבנת העולם בצורה רציונלית ומתמטית.

בעיני ילד מספרים מייצגים שתי איכויות שונות. הוא לומד לספור עצמים בקבוצה ובמקביל הוא לומד למצוא את מיקומו היחסי של עצם ספציפי בשורה של עצמים. מדובר בשתי פעולות שמכנים אותן ומסמלים אותם באופן זהה.



המספר הראשון המונה הוא תכונת עצם, במקרה זה קבוצה שלמה, ואילו המספר השני הוא יחס בין איבר לשאר איברים בקבוצה של מספרים. הראשונה היא תכונה לוקלית, והשנייה היא תכונה גלובלית שנובעת מהיחס אל הכלל. עלינו להניח אם כך כי בדומה למספרים קיימת גם הגדרה חדשה של המתמטיקה כולה שבה קיימת גם משמעות גלובלית לכל גילוי שהוא מקומי.

המסע של ספר זה מסתיים בהצבעה על קיומה של מתמטיקה אחרת שהיא תיאור שלם של מה שקורה בשעה שבני-אדם יוצרים את המתמטיקה. הד קריאתו המרדנית של אותו תלמיד מסתיים במסע למתמטיקה חדשה.

1. נעליים
2. ללא מילים
3. אל המתמטיקה
4. יש חיים
5. בגיל הרך
6. הקול מספר
7. תורת המיתרים
8. ייתנני עוף
9. בספרייה המתמטית
10. טיפה בים
11. בעיה פתוחה
12. רוח מתמטית
13. חיבור עצמי
14. קצת דמיון
15. מחשב מתמטי
16. משל קטן
17. זמן מתמטי
18. הגדרת מתמטיקה
19. אמת חדשה
20. סימטרייה אחרת
21. מלבני זהב
22. המתמטיקה ויוצרה
23. לדעת מתמטיקה @
24. אין זמן
25. השלם וחלקיו
26. רואים מתמטיקה
27. שדה המתמטיקה
28. קיום ובנייה
29. פעולה אחרת
30. הסתברות לסטטיסטיקה
31. עמודי גדל
32. סב המדע
33. הבנה ראשונית
34. צדק נראה
35. אי- הידיעה
36. מגיעים יחד
37. תשובה בשאלה
38. משוואה עברית
39. שד מתמטי
40. צריך להיווכח
41. תהודת הבריאה
42. צופן אוניברסלי
43. צופן אני
44. פלא הפירמידה
45. חיים תבוניים
46. מאה מהילברט
47. משפט אחרון
48. בעיות מעקיבא
49. נר שמיני

נעליים

בשעת מבחן במתמטיקה באחד מבתי-הספר התיכוניים התבקשו התלמידים לחשב את הסכום של טור המספרים הבא:

$$\frac{1}{1*2}+\frac{1}{2*3}+\frac{1}{3*4}+\bullet\bullet\bullet+\frac{1}{(n-1)*n}$$

מאחר והייתי אחד מאותם תלמידים, מצאתי דרך לפתור את השאלה. אבל בהפסקה, לאחר המבחן, הטרידה אותי השאלה שוב ולא הייתי שבע- רצון מדרך הפתרון. חשבתי עליה שוב ומצאתי פתרון פשוט יותר:
אפשר להציג את הסכום הזה באמצעות חיבור הביטויים $(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$
k=1…,n-1 . אם כותבים את זה כך מצטמצמים כל הביטויים בסוגריים, ונשארים רק האיבר הראשון והאחרון.

בשיעור המתמטיקה שלאחר מכן הראיתי את הפתרון למורה. המורה שמח מאוד והציג אותי בפני התלמידים כתלמיד שמתעניין במתמטיקה באמת. למרות שהיה בידי פתרון נכון, חיפשתי משהו טוב יותר.
בהמשך פתר המורה על הלוח בהתלהבות ובהנאה את אחד התרגילים, שהתלמידים התקשו בו מאוד במבחן, הוא ניסה להראות ששאלה אחרת במבחן שכל התלמידים התקשו בה, לא הייתה על-פי הבנתו קשה באמת.

לפתע, מתוך דחף פנימי בלתי מוסבר, צעקתי בקול רם בכיתה " **נעליים** ! " המורה הסתובב אחורה, כשמבטו מופנה אלי כלא מאמין למה שאוזניו שומעות. הכיתה דממה, אך לאחר כמה שניות אי- אפשר היה לשאת עוד את המתח שהיה באוויר, והכיתה פרצה בצחוק מתגלגל. אט אט חזרו העניינים למסלולם הרגיל. לא דיברתי עם המורה על המקרה.
היום נדמה לי שאני מבין מה קרה באותו רגע בכיתה. היה זה מרד מסוים לאופן ההתייחסות למתמטיקה. הצורה הקנונית וההגיונית שבה חושפים את התוצאות המתמטיות, אך לא את דרך הגילוי שלהן. בדרך זו אנו פוגעים במהות האמיתית השלמה של המתמטיקה. העובדה שמסתירים את הממד של תהליך היצירה המתמטית הופכת אותה לדו -ממדית.

ספר זה, נכתב שנים רבות לאחר אותו מקרה, והוא מנסה לעשות שימוש נוסף בנעליים. לחלוץ אותן בדמיון, כדי לצאת למסע יחפני בשדה המופלא של המתמטיקה. לשם כך עלינו להניח את הביטחון שיש בהיגיון צרוף. כך נוכל לחוש כיחפים מה קורה לנו באמת, כשאנו נפגשים עם סמלים מתמטיים ומנסים להבין ולפרש אותם וליצור בהמשכם סמלים חדשים.

האותיות והמילים הכתובות מכאן ועד סוף הספר ינסו אם כך להאיר את המתמטיקה בזווית אחרת. אפשר שהמתמטיקה נתפסת עדיין כעניין רציני. אךהדמיון הפונטי בין חידה ובדיחה מרמז על כך שהמתמטיקה היא גם סוג של בדיחה. אולם בשל טעות מסוימת בהבנה של סמלים, החידה הזו היא בלתי פתירה. האם בדרך הזו תהפוך החידה לבדיחה? את זה נגלה בסוף.

ללא מילים

אני אוהב לשחק עם ילדים בגן בלגו, בלוטו, בפלסטלינה, בכדור בתופסת ובמשחקים נוספים. בסוף היום אני מיודד עם ילדים רבים. פעם התארחתי אצל משפחה בגרמניה עם ילדה בת 6. הגננת שלה הסכימה שאבקר בגן. אמנם לא ידעתי לדבר עם הילדים בגרמנית, והילדים כמובן לא ידעו לדבר עברית, אך לא הייתה כל בעיה לשחק אתם במשחקים שונים.

כשהגיע שעת סיפור, ביקשתי מהגננת לספר סיפור. הגננת הביטה בי בפליאה. בכל זאת התיישבתי מול הילדים והתחלתי לספר להם סיפור בעברית, והילדים היו מרותקים לסיפור. כשסיימתי לספר את הסיפור, ניגשה אלי הגננת ואמרה : "משה, הילדים רוצים לשמוע את הסיפור הזה עוד פעם... "

חזרתי לארץ עם הבנה חדשה. ילדים אינם צריכים תמיד להבין על מה מדברים אתם. התחלתי לספר לילדים סיפורים בשפת "ג'בריש", שהיא חסרת משמעות לכאורה. הילדים היו מרותקים לסיפורים, הם היו מלאי עניין ושמחה. מצאתי פתרון לשאלה איך ליצור קשר עם ילדים, בלי הרבה מאמץ.

יום אחד ביקרתי בגן חדש, ישבתי מול הילדים והתבוננתי בלי לדבר. הילדים התבוננו בי בחזרה. בתחילה הם חשבו שאני מחכה שיהיה שקט, אבל כשהשתרר שקט, לא הוצאתי שום מילה. הייתה מבוכה בגן, הילדים התבוננו בי במבט אלכסוני והחלו לחייך זה לזה. לאחר שתי דקות של מתח פרץ אחד הילדים בצחוק שסחף אחריו את כל הילדים. גן שלם התחיל להתגלגל מצחוק, ואני צחקתי יחד אתם. חזרתי על ההתנסות זו פעם אחר פעם בגנים אחרים. הרגשתי שמצאתי נוסחת אלכימיה במפגש עם ילדים. התבוננות ואי-עשייה לכאורה.

כעבור שנים אחדות נפגשתי עם קבוצת ילדים אתיופים כשרק עלו לארץ. הם לא ידעו עברית, ואני לא ידעתי אמהרית. התחלתי לכתוב על הלוח כמה תרגילי חשבון ללא הסבר מילולי. הפניתי את מבטי אליהם בציפייה שישלימו את הערך של X החסר בתרגיל השלישי.

$$1+x=5 \qquad x=4$$
$$2+x=7 \qquad x=5$$
$$4+x=5 \qquad x=$$

הייתה דממה, כי הם לא ידעו מה אני רוצה מהם. אחד הילדים הרים את ידו, ניגש ללוח ורשם בגיר $X=1$. טפחתי על שכמו, והוא חזר לשבת במקומו. ניגשתי ללוח ורשמתי תרגיל נוסף ללא דיבור והסבר. הפעם כבר ילדים אחרים הרימו ידיים והבינו מה צריך לעשות. אחד מהם ניגש ללוח לפתור. במהלך שעה הצלחתי להעביר תרגילים בנושאים מתמטים שונים: משוואות, מספרים שליליים, חזקה ריבועית ועוד מושגים שהם לא הכירו מעולם ושמלמדים אותם בדרך- כלל לאורך מספר שנות לימוד.

מתמטיקה היא שפה של סמלים. אפשר ללמד אותם ואת משמעותם באמצעות פעולה גם ללא מתן הסבר מילולי. ייתכן שמתן הסבר בשפה מדוברת מסרבל לעיתים את הבנתה. בתרגילים המוצגים לילד ללא הסבר, התלמיד צריך בכוחות עצמו לפענח את משמעות הסמלים, שהם מציבים בפניו אתגר אמיתי ולא משימה של זכירה ושינון.

"עלים מתמטיים" הם אותם דפים המתייחסים אל הילד כאל מי שמסוגל לפענח בכוחות עצמו משמעות מתמטית שחבויה בהם. הוא מגלה את משמעות הסמלים בכוחות עצמו. מבוגר שנוכח עם הילד בפתרונו, יכול לטעת בילד אווירה של חקירה וסקרנות מתמטית. פענוח המשמעות האמיתית של הסמלים דורש מאתנו לצאת לממד אחר שהוא- ללא מילים.

אל המתמטיקה

הצופים ישבו בכיסאות והמתינו בשקט לתחילת הוויכוח. על הבמה ישבו זה בצד זה, המתמטיקאי הגאון אוילר, שהאמין בקיום האלוהים, והאטאיסט המושב רב בידיעות דידרו. המנחה פנה לאוילר שיפתח את הדיון בשאלת קיום האל. אוילר ניצב על הבמה, כשפניו אל אנשי חצר המלך. ״ ובכן רבותיי, ידוע שלכל מספר a ולכל מספר b קיים מספר שלישי n המקיים את המשוואה הרשומה. מכאן נובע שאלוהים קיים. ״

$$a^b + 1 = n$$

הקהל היה די מופתע, דידרו הביט משתהה, הנוסחה שנרשמה על הלוח עוררה רעד מסוים בגופו, והוא החליט לרדת מהבמה ולהיעלם. אוילר ניצח בוויכוח, אך ברור כי טעון מעין זה לא היה מתקבל היום כהוכחה לקיומו של אלוהים. (*)

אוילר הכין את עצמו היטב לקראת הוויכוח. הוא ידע שהמתמטיקה היא עקב אכילס היחיד של דידרו, על כן השתמש בנקודת תורפה זו להכריע את הדיון כבר בתחילתו. ברגע שרשם נוסחה מתמטית על הלוח איבד דידרו את שיקול-דעתו מהפחד שהיה לו ממתמטיקה.

(*) בזמן אחר, גילה אוילר שנציב את מספריים הבאים במשוואה , a=e $b = \pi i$ n=0 , נקבל את הזהות $e^{\pi i} + 1 = 0$. קשר שמתקיים בין 5 מספרים חשובים במתמטיקה i,e,0,1, π ! האם זהות מפתיעה זו מעידה שאוילר חש כבר בזמן הצגת ההוכחה כי בתוך הנוסחה שרשם אז חבויה גם הוכחה אמיתית לקיומו של האלוהים?

חלפו מאז שנים רבות, אך דומה שדבר משמעותי לא השתנה ביחס של רוב בני האדם למתמטיקה הרואים בה דבר גורם מפחיד ומאיים. ייתכן שאין כל רע בכך, הרי לא חייבים לאהוב כל תחום, ומלבד זה הרי רק אחוז קטן מהאנשים משתמשים במתמטיקה בחיי היומיום. הבעיה היחידה היא שהשפעה של יראה זו מחלחלת לאורחות-חיים אחרים. דיאלוג אנושי כולל באופן סמוי חשיבה הגיונית. טעויות בחשיבה באות לידי ביטוי גם בדיונים, אשר המתמטיקה לא מופיעה בהם באופן ישיר. ויכוחים בין בני-אדם נובעים, למשל, בשל אי הבחנה בין ״או״ ל ״וגם״ או בין ״אפשרי״ ל ״סביר״.

שינוי היחס למתמטיקה הוא בעיה אשר פתרונה עשוי לאחד את העולם. מדי מספר שנים מוכרזות אמנם רפורמה חדשה בהוראת המתמטיקה, אך המצב נשאר בדרך כלל ללא שינוי. נשאלת השאלה מדוע קשה כל-כך לשנות את המצב. האם ייתכן שקיים משהו מפחיד במתמטיקה עצמה.

בדומה לאמונה באלוהים כך גם המתמטיקה מוצגת שהיא נפרדת מהתהליך היוצר אותה. אבל המהות החיה שלה היא בהליכה בדרכים לא סלולות, באפשרות לרגע גילוי והארה. אם נרצה להגיע באמת לאהבת מתמטיקה נצטרך לעזוב את הבנייה החיצונית והשיטתית של ידע, כנדבק אחר נדבק.

נתבונן אם כך שוב בהוכחה של אוילר לקיומו של האל ונראה שאפשר שצדק בדרך שבה ניסה להוכיח זאת. לא התוכן המילולי של ההוכחה הוא העדות לקיומו, אלא עצם התרחשותה ואופן התרחשותה. אוילר עמד שם, מול קהל גדול, וחשב את מה שחשב, ואמר את מה שחשב, ואיך שאמר את שאמר, ואיך שהסתכל אז במבטו על הקהל, והם הסתכלו עליו בחזרה משתאים, והוא מתבונן עליהם שוב, וכך כמשחק מראות עד אין-סוף. הוא הצליח להצביע על מה שרצה להצביע. ואי-אפשר להגיד אותו בצורה מדויקת במילים אלא רק ברמז דק , אל המתמטיקה.

יש חיים

אחת השאלות המרתקות ביותר היא האם יש חיים אחרים ביקום. בשנת 1877 פרסם אסטרונום איטלקי בשם ג'אוני מאמר על תוצאות תצפיותיו הממושכות בטלסקופ בכוכב הלכת מאדים. אך בשל טעות בתרגום המילה האיטלקית CANALI לאנגלית כ CANALS, חשבה הקהילה המדעית חשבה שהוא זיהה תעלות בנויות במאדים, המעידות על קיום של חיים תבוניים במערכת השמש. בשנת 1961 כתב האסטרונום פרנק דראק משוואה מתמטית המתארת על-פי הבנתו את מספרן של הציויליזציות ביקום היכולות להתקשר זו עם זו.

N=Ro*Fp*Ne*F1Fc*L**

המשתנים במשוואה זו הם: R0 - מספר הכוכבים ביקום, FP - שכיחות הכוכבים שיש להם כוכבי לכת, NE - מספר הפלנטות שמתאימות לקיום חיים F1- שכיחות הפלנטות אשר בהם באמת התפתחו חיים FI- שכיחות החיים שמהם התפתחה אינטליגנציה, FC- שכיחות האינטליגנציות שמתקשרות לציויליזציות אחרות, L - משך החיים של אותה אינטליגנציה.

כל מספר במשוואה מחושב באמצעות הערכה בלבד. ניתן להגיע לערכים שונים למספר N, אבל עצם יצירת מתמטיקה ביקום, כפי שבאה לביטוי בכתיבה של נוסחה זו, מעידה כי בכל מקרה ערך התוצאה המתקבל חייב להיות גדול או שווה ל 1 . שאם לא כן, לא היה מי שיכתוב אותה.

ייתכן גם שיום אחד ינחת על פני כדור הארץ יצור ממאדים או מכוכב אחר וירצה לבדוק האם על פני כדור הארץ יש בכלל חיים. בשל האוניברסליות של המתמטיקה הוא ינסה אולי לפענח את החיים על פני כדור הארץ באמצעות הבנת המתמטיקה הנוצרת כאן. אם הוא יגיע לכיתה שלומדים בה מתמטיקה בדרך המקובלת, והוא ינסה להבין באמצעות השיעור את המתמטיקה של האדם. הוא ירשום לפניו את הנתונים הבאים אשר אותם יגלה בהתבוננות:

יש כך וכך תלמידים שהיו יכולים לאהוב מתמטיקה -Ro. מתמטיקה לומדים באמצעות ספרים שיטתיים, צעד אחר צעד -Fp . מתמטיקה לומדים כי חייבים ולא מתוך בחירה חופשית -Ne. כל הילדים עסוקים בו זמנית באותו עמוד בספר-F1 . הילדים נבחנים מדי פעם על הידע שלהם במתמטיקה Fc הילדים מקבלים ציונים ביחס הפוך לטעויות שלהם-L .

האורח ינסה להעריך איפוא את מספר האנשים שהמתמטיקה עדיין חיה בהם. לשם כך הוא ישתמש בנוסחה לחישוב שכיחות החיים ביקום:

N=Ro*Fp*NeFl*Fc*L**

התוצאה שהוא יקבל תהיה כנראה נמוכה למדיי. לרוב בני-האדם אכן אין בתנאים הללו סיכוי שהמתמטיקה תחיה בהם. אורחנו חוזר אל כוכבו פסימי ביחס לסיכוי למצוא חיים מתמטיים על פני כדור הארץ. אך אם נגלה דרך אחרת להבין את המתמטיקה אולי נראה שבמתמטיקה עצמה , יש חיים.

בגיל הרך
דרך טובה אפשרית לטעת אהבה למתמטיקה אצל ילדים היא באמצעות התמודדות עם בעיות ואתגרים למחשבה. אפשר לעשות זאת כבר עם ילדים בגיל הרך. בדרך של שאלות שונות : מהו המספר הגדול ביותר? מהו מספר המטבעות שיכול להשתקף יחד עם מראה? איך אפשר לבנות קוביית מזל שנופלת תמיד באותו מספר?

נתבונן לדוגמא בשאלה "מה יש יותר, אנשים או עיניים?" לנו, המבוגרים, התשובה נראית פשוטה, אך אין הדבר כך בעיני ילדים בגיל הגן. הנה דיאלוג אופייני המתקיים בין מבוגר לילד.

מבוגר: לדעתך, מה יש יותר אנשים או עיניים?
ילד: ברור שאנשים.
מ. איך אתה יודע את זה?
י. כי יש בעולם המון אנשים.
מ. אז מה זה אומר?
י. שיש בעולם יותר אנשים.
מ. ומה זה אומר על העיניים?
י. שיש גם הרבה עיניים.
מ. למה?
י. כי לכל אחד יש שני עיניים.... וואפס... רגע, יש יותר עיניים מאנשים.
מ: איך אתה יודע?
י: כי לכל אחד יש שתי עיניים.
מ. אם כך אז מה יש יותר, אנשים או אוזניים?
י. זה קל, ברור שאוזניים.

המבוגר אינו מתקן את הטעות של הילד. הוא מנסה להבין את השקפת עולמו, גם אם היא אינה נכונה. באמצעות דיאלוג שבו הילד מסביר את תשובתו. הילד מתבקש להאיר את השאלה לא רק מנקודת מבטו, אלא גם מנקודת מבטו של השואל. הוא צריך לצאת מעצמו ולראות את השאלה בעין נוספת.

הילד זוכה ברגע של הארה מתמטית. הוא עוצר בדרך-כלל את נשימתו, הוא פוקח את עיניו, כאילו שהוא רואה מבפנים משהו, ומסביר מדוע יש יותר עיניים מאנשים. הילד ראה את התשובה, בדמות של אדם עם זוג עיניים. כשנשאל אותו אז, מה יש יותר אנשים או אוזניים, הוא יענה בקלות שיש יותר אוזניים, כי דמות האדם עוד לפניו.

המשורר גיתה ראה בגיל 20 תמונה של יצירת חייו "פאוסט". להשלמת היצירה זכה רק כעבור 60 שנה סמוך למותו. מאחר והיה רחוק ממתמטיקה גיתה ידוע כאומן למרות שפיתח מתודה מדעית המתבססת על התבוננות ולא על ניסויים כפי שמקובל עד היום. בהתבוננות מעין זו חיפש גיתה אב-טיפוס של כל תופעה, ניצן אשר ממנו נובע הכול. חקירה באמצעות מבט על העולם בשתי עיניים, אובייקטיבית וסובייקטיבית.

הבנה מתמטית היא סוג של ראייה, המושגת בדיאלוג בין תפיסה פרטית ותפיסה מוכללת. בדומה לראיית העומק שנוצרת מכך שיש לנו שתי עיניים. אך כדי להבין גם את זה באמת ולא רק כתיאוריה צריך הקורא לחוות את הדיאלוג הזה באופן אישי. להיפגש עם ילד בגיל הרך, לשאול את השאלה הפשוטה הזו, מה יש יותר בעולם אנשים או עיניים?

עלינו לנסות להראות את העולם שוב מנקודות מבטו הכפולה של ילד, אשר סופר ומבצע פעולות חשבון פשוטות כמו חיבור או כפל. כך נוכל להבין את אותו ניצן מתמטי אשר ממנו מתפתחת המתמטיקה באמת. מתמטיקה על פי רוחו של גיתה תגלה כי המתמטיקה כשלמות אחת היא, בגיל הרך.

הקול מספר

אחד הגילויים המתמטיים החשובים היה מציאת הסבר מספרי ליחסים הרמוניים שנשמעים בין הצלילים. פיתגורס ראה שכאשר אורכי המיתרים מתייחסים זה לזה ביחסים פשוטים כמו 2:3 או 3:4 , הצלילים הנשמעים יחד הם הרמוניים זה לזה. בעקבות גילוי זה קבע פיתגורס את אמרתו המפורסמת "הכול מספר". בדרך זו הביע את אמונתו שאת כל התופעות שבטבע ניתן בסופו של דבר להבין באמצעות מספרים ומתמטיקה.

גילוי אחר שמיוחס לו נקרא משפט פיתגורס, והוא דן ביחסים קבועים שמתקיימים בכל משולש ישר-זווית. סכום הריבועים הבנויים על כל אחת משני הצלעות שווה בדיוק לריבוע הבנוי על היתר. דוגמאות מפורסמות לכך הן משולשים ישרי זווית עם אורכי הצלעות 3,4,5 או 5,12,13 .

היחסים שבין אורכי הצלעות הללו הם מספרים רציונליים, כלומר מספרים שאפשר לבטא אותם באמצעות היחס בין שני מספרים שלמים. למשל, המספרים 2/7 11/3 87/23 וכו'. על-פי אמרתו של פיתגורס אפשר היה לחשוב שכל המספרים שבטבע הם אכן רציונליים. אך דווקא משפט פיתגורס הוא זה אשר שהביא את אחד מתלמידיו של פיתגורס לגילוי מרעיש על דבר קיומם של מספרים אי-רציונלים.

במשולש ישר-זווית שאורך כל צלע שבו הוא בדיוק 1 , אורך האלכסון שווה לשורש של 2 . תלמידו של פיתגורס מצא דרך להראות ששורש 2 הוא מספר לא רציונלי, שלא ניתן לבטא אותו כמנה של שני מספרים שלמים.

האגדה מספרת כי פיתגורס היה כה נסער מגילוי שסתר את תורתו עד כי ציווה להרוג את תלמידו. כך התפשטה בתרבות המערבית חשיבות הרציונליות והאמונה שניתן להבין כל דבר באמצעות ההיגיון או המתמטיקה.

למזלנו לא החליטו ללמד ילדים לדבר בצורה מסודרת לדבר. הם לומדים לדבר בכוחות עצמם, באמצעות דיאלוג עם סביבתם, השמעת צלילים, ניסוי ותהייה. אם יחליטו יום אחד שצריך ללמד ילדים לדבר באופן שיטתי, אפשר שהם יתקשו אחר-כך מאוד בדיבורם. ניסיתי להסביר לחברי יגאל מדוע אני חושב שאין בכלל צורך ללמד מתמטיקה. ילדים הרי ילמדו אותה מכוח עצמם, והסביבה שלנו מדברת מתמטיקה. אפשר ללמוד מהסביבה את השימוש היום יומי במתמטיקה.

אם רוצים בכל זאת ללמד מתמטיקה הרי יש לעשות זאת לא משום שצריך אלא משום שזה אפשרי. לא מפני שחייבים, אלא בגלל היופי הפנימי שיש בה. המתמטיקה היא כמו מוזיקה, ולמרות שלא מלמדים בדרך-כלל מוזיקה, ואולי דווקא בגלל זה , הרי אנשים עדיין אוהבים לשמוע מוזיקה .

לא הצלחתי לשכנע את חברי בטיעונים ובהסברים הללו. ישבנו בשקט, ברקע התנגנה הסימפוניה החמישית של ברוקנר. בפרק השני, ניגנו כלי מיתר באיטיות יחד עם אבוב ופרטו בדמיוני נוף של הרים וגבעות. צלילי המנגינה התאמצו בטיפוס אט-אט למעלה ההר, מאיטים לרגע אחד של מנוחה, נושאים פניהם להגיע למעלה הרכס, משהו עומד להתרחש. ברגע של דממת התגלות, התאחדו כלי המיתר ופרסו בעוצמה נוף מרהיב, עמק רחב-ידיים שהיה נסתר מעינינו.

לא ניתן להבין את העולם באמת באמצעות מילים והגיון. בכל אדם, בכל מעשה, בכל תנועה שביקום מסתתרת איזו מהות אחת שלמה , איכות מוסיקלית של הדבר. בדמיוני הופיע פיתגורס ומכריז, הקול מספר.

תורת מיתרים

"מיתר" הוא מסגרת חינוך אלטרנטיבית עבור ילדים. במראהו החיצוני פעולתו דומה לגן עם ילדים גדולים יותר. קבוצה לא גדולה של ילדים הפועלים במרכזי פעילות, והם ואחראים לסדר היום שלהם. המבוגרים נוכחים בסביבת הילדים ופועלים אתם רק במקרה שקיים רצון משותף. חבר שלי דני ממקימי "מיתר" , הזמין אותי ללמד שם מתמטיקה.

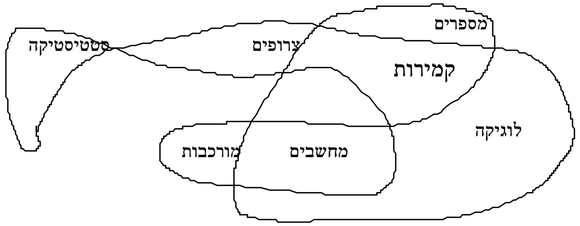
המפגשים שלי ב"מיתר" היה, כאמור תמיד רק עם ילדים שבחרו בכך. התחלתי בתרגילי חשבון שהייתי נותן לילד, סיכום או חזרה על הידע שלו. אחר-כך הייתי כותב לו " עלה מתמטי", או מציב בפניו איזו בעיה מתמטית. את התפקיד שלי ראיתי בניסיון לנסות ליילד בילד איזה רגע של גילוי והארה, פקיחת העיניים ועצירת נשימה, החושפת ההתרגשות באותו רגע.

ילדה בת 6 ניגשה אלי יום אחד ואמרה : "משה היום אני לא רוצה ללמוד אתך חשבון". שאלתי אותה מה היא כן הייתה רוצה לעשות איתי. שאלה הילדה , "מה עוד לא למדנו ?" .

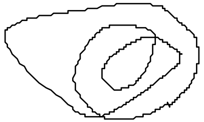
יש עוד הרבה דברים שלא למדנו, ומה היא הייתה רוצה ללמוד איתי. הילדה ציירה על דף נייר את ציור האינסוף ואמרה לי כי הייתה רוצה ללמוד איתי על צורות כאלו. ציירנו צורות כאלו , ראשית עם פיתול אחד ואחר כך עם מספר גדול יותר של פיתולים. קראתי לצורות הללו לולאות. וגילינו תכונות שלהן. הנושא סחף אחר כך קבוצה נוספת של ילדים במיתר שהיו עסוקים בציור לולאות שונות, וחקר תכונות מתמטיות שלהם.

אם ניקח עיפרון ונצייר אתו קו על דף נייר מבלי להרים את העיפרון עד שנחזור לבסוף אל נקודת ההתחלה, נקבל צורה מתמטית שנקראת לולאה.

זהו קו עקום במישור שחותך את עצמו מספר פעמים. הלולאה מפרידה את המישור למספר תחומים. כל נקודת חיתוך של הקו עם עצמו מכונת קודקוד. אפשר לראות למשל כי תמיד מספר הקדקודים קטן ב 1 ממספר התחומים.



גם את שפת המתמטיקה כולה אפשר לתאר באמצעות לולאות שכאלה. אפשר לצייר לולאה עם 60 קדקודים המכילה את 61 התחומים השונים של המתמטיקה (הציור כאן הוא רק חלקי והוא מכיל רק 7 תחומים). שאלות על לולאות יכולות לייצג תוכן פנימי ומשמעות גם של תחומים שונים במתמטיקה. גילוי הזיקה אפשרית בין צורה ומשמעות הוא הבסיס בניסיון לאחד את חוקי הטבע לתיאוריה אחת שמכונה , תורת המיתרים.



יתנני עוף

על התרבות האנושית אפשר ללמוד באמצעות פרושים שונים של השיר : "מי יתנני עוף". הפרוש ראשון מבטא את ערגת האדם לעוף מעל ולהינשא אל מעבר לשגרת החיים, ללקט את הגרגירים אך ורק לכשיופיעו. הפרוש השני הוא של אדם הדואג כל הזמן לקיומו, הבטן מקרקרת והוא רעב לתרנגולת. איזה אב יגיד לבן שלו - היום בני נאכל לארוחת הצהרים, תרנגולת. אז לשם כך הומצאה המילה עוף שמסתירה זאת מעיניו.

למרות זאת, משפחת התרנגולת, כשהיא עדיין בחיים, תורמת מספר היבטים רוחניים לתרבות האדם. ראשית בל נשכח את התרנגול הגאה המזהה לראשונה, בעוד אנחנו ישנים, את קרני האור הבוקעות להן מבעד לחשכה המקיפה אותנו והוא קורא לנו בקול אך אנחנו כדרכנו לא מתעוררים אל האור. וכשמגיע הבוקר, משפחת הלול לא מתייאשת מהאדם וממציאה לנו שאלה המהותית: מה קדם למה הביצה או התרנגולת. לכאורה שאלה של מה בכך, נאמר היתולית. אך עיון מעמיק בשאלה מגלה שהתשובה לשאלה, נוגעת בתפיסת יסוד של האדם.

ניקח מספר כלשהו, למשל 1224 נניח שזו ביצה עכשיו נפרה אותה עם המספר ההפוך לה כלומר עם 4221 נחבר את 2 המספרים ונקבל מעין תרנגולת 5445 זהו מספר סימטרי מימין ומשמאל, מה שמכנים במתמטיקה -פלינדרום. אם נבחר ביצה אחרת למשל את 156 אז על ידי הוספת ההפוך 651 נקבל תרנגולת 807 שהיא לא פלינדרום, אך נמשיך את הצאצאים נקבל אחר כך 1515 שזה עדיין לא פלינדרום ובדור הבא אחרי 3 שלבים קיבלנו 6666 שזה כבר כן פלינדרום. אם ננסה משחק זה עם מספרים אחרים נגלה שמקבלים תמיד בסוף איזה פלינדרום, אלא אם כן...

196
691
887

כל זה נכון, עד שנבחר את המספר 196. אפשר לנסות שוב את המשחק לקבל דורות על דורות שאינם פלינדרום. לאחר יותר ממיליון שלבים אשר חושבו עד היום במחשבים במהלך חודשים רבים לא נתקבל פלינדרום. האם יתקבל פולינדרום ? זוהי שאלה אמיתית, בעיה פתוחה במתמטיקה.

כשאנחנו אומרים למשל את המילה "מת-מטיקה" , ועוד במנגינה מסוימת, לרוב האנשים שתי האותיות הראשונות של המילה מאד רלוונטיות לתחושה שהמילה מעוררת. חבר שלי עמוס, כתב פעם בטעות מתמתיקה, אולי בשביל להראות שמתמטיקה בדרך הרגילה מתה פעמיים. מלמדים מתמטיקה כמסכת של עובדות ומשפטים ידועים ונכונים שצריך לשנן אותם. אך אפשר להפוך את היוצרות של שאלה ותשובה, של מורה ותלמיד. אז תתחזק השאלה של מידת עופיותה של המתמטיקה. היא מוגשת לנו למאכל נקייה וממורטת עם הגיונה הצרוף. מקצוע הלולנות עשוי ללמד אותנו שאפשר גם אחרת. להתעורר בבוקר עם קריאת הגבר כדי ליצור מתמטיקה, יקרא : לעוף באמת.

בקרבת המעגל שאלה-תשובה נוצרת תנועת מערבולת של תודעה שדרכה אפשר להישאב לתפיסה שונה לחלוטין של המציאות . גם לזמן כמו המרחב יש תכונות מעגליות ולא ניתן להפריד באמת בין הביצה והתרנגולת ואף אחת לא קדמה את רעותה. . שני הפתרונות הללו בנפרד או גם ביחד הם אולי מהפכניים בתפיסת האדם את עצמו. יש אולי עוד פתרונות לשאלה שכל אחד מהם הוא מעין ביצת הפתעה .

בקינה של המתמטיקה
מחכות להן בנחת עוד
61 ביצים לבקוע אל החיים
התחומים השונים של המתמטיקה
כי הרוב הרי עדיין לא ידוע.

בספריה למתמטיקה

הביקור בספריה למתמטיקה עשוי להיות חוויה מאד מתסכלת. אני הולך מתוך מטרה מסוימת, פתאום נתקלות עיניי בספר שמונח על השולחן עם כותרת הנראית מעניינת ואני מתפתה להציץ בו. אני ממשיך בכל זאת נחוש להגיע ליעדי המתוכנן, אבל רואה פתאום על אחד המדפים ספר עם כריכה בצבע מעניין, אני פותח אותו ומציץ. ספר אחר ספר נבחר באופן מקרי . עוברת שעה ויותר, בתנועה חסרת תכלית. כך אני נוהג להעביר שעות במרחבים אבודים של מתמטיקה. ללא חווית למידה אמיתית, וחש תסכול שנובע ממפגש עם אוקיינוס של ידע.

הסתברות 60, קומבינטוריקה 5 , חבורות 20 , אנליסה נומרית 65 , קמירות 52, סטטיסטיקה 62, מחשבים 68 , לוגיקה 3 , מספרים 11, משוואות דיפרנציאליות 34, טורים 40, פונקציות מיוחדות 33, שדות 12, היסטוריה 0 , יסודות 1, סריגים 6, קטגוריות 18, K תאוריה 19, חשבון וריאציות 49, אנליסה פונקציונלית 46, גאומטריה 51, מכניקה 70 , יחסות 83, אופטיקה 78, אינפורמציה 94, אסטרופיסיקה 85, מבנים אלגברים 8, אלגברה לינארית 15, קבוצות 4, אופרטורים 47, קרובים 41, משוואות אינטגרליות 45, ממשיות 26, מידה 28, גאומטרה אלגברית 14, טופולוגיה 54, טופולוגיה אלגברית 55, אנליסה גלובלית 58, יריעות 57 , פוטנציאל 31, מרוכבות 30, פוריה 42, אנליסה הרמונית 43, משוואות הפרשים 39, בקרה 90, ביולוגיה 92 , קוונטים 81, מכניקה סטטיסטית 82, חוגים קומוטטיבים 13, חוגים אסוציאטיבים 16, חוגים לא אסוציאטיבים 17, חבורות טופולוגיות 22, רב מרוכבות 32, ,מכניקת מוצקים 73,גאופיסיקה 86 ,משוואות חלקיות 35 , טרנספום אינטגרלי 44, גאומטריה דיפרנציאלית 53, מכניקת נוזלים 76 , תרמודינמיקה 80 , בקרה 93.

אבל הפעם אני נחוש בדעתי להפוך את הביקור בספריה למשמעותי. אני רושם לעצמי מהי השאלה שבכדי לענות עליה אני הולך לספריה. במהלך הביקור אני שומר לא לסטות ומתעקש לנסות לברר את התשובה לשאלה. ניצב לפני דלת הספרייה ושואל את עצמי מהם ממדי המתמטיקה ?

בספריה למתמטיקה יש 9 ארונות עם 2 צדדים. כל צד מורכב מ 4 יחידות, בכל יחידה 6 מדפים. על כל מדף יש כ 40 ספרים. סה"כ 9*2*4*6*40=17,280 ספרים. כל ספר כזה גובהו 25 ס"מ רוחבו 15 ס"מ ועוביו 2 ס"מ , בכל ספר כזה יש 200 עמודים ובכל עמוד 30 שורות. את המתמטיקה ניתן לשכן באליפסה בעלת 61 ממדים בהתאם לתחומים השונים. אפשר למשל לנוע באופן אקראי במרחב שכזה:

גם במהלך אקראי לכאורה
אפשר למצוא איזו חוקיות.

אורך כל הכתוב 17,280*200*30*15=1,555,200,000 ס"מ שהם 15,552 קילומטר, מקיפים מעגל ברדיוס 2,475 ק"מ, כשליש מרדיוס כדור הארץ. השטח כולל של הספרים 17,280*200*25*15=1,200,960,000 סמ"ר שהם 120,096 מ"ר הנפרסים בריבוע אחד שצלעו 346 מטר. או עוטפים כדור שרדיוסו 97 מטר. כל ספר גובהו 25 ס"מ רוחבו 15 ס"מ ועוביו 2 ס"מ . נפחם 17,280*25*15*2=12,960,000 סמ"ק שהם כ 12.9 מ"ק . ניתן לאחסן את כל היצירה המתמטית בכדור שרדיוסו פחות מ 2 מטר.

כל ספרי המתמטיקה יכולים להידחס לתוך כדור אחד ברדיוס 2 מטר ! זה כבר פחות מהגובה שלי, ומתחיל להראות שיש אולי תקווה להבנה של המתמטיקה כולה. אם כך יתכן שקיימת התבוננות נוספת פשוטה יותר, הנוגעת במהותה של המתמטיקה המגלה בה ממד נוסף.

טיפה בים

על דף נייר רשומה משוואה מתמטית - $x^2 - y^3 - 1 = 0$ (*) אך לא נכתב שם מה נדרש לעשות במשוואה זו. אנחנו רגילים לחפש פתרונות לבעיות, כך נמצא שהמספרים y=2 x=3 אכן פותרים את המשוואה. אחר כך אנחנו שואלים שאלות אחרות המתייחסות לפתרונות שלמים למשוואה .

האם לכל מספר x ולכל מספר y מתקיימת המשוואה? האם קיים x שלכל y מתקיים (*)? האם לכל x קיים y , כך שמתקיים (*)? האם קיים x וקיים y , כך שמתקיים (*)? האם לכל y ולכל x , מתקיים (*) ? האם קיים y כך שלכל x , מתקיים (*) ? האם לכל y קיים x , כך שמתקיים (*) ? האם קיים y וקיים x, כך שמתקיים (*) ? בניסוח פורמלי אפשר לכתוב את האפשרויות הללו כך:

$$\forall x \, \forall y \, (*)$$
$$\forall x \, \exists y \, (*)$$
$$\exists x \, \forall y \, (*)$$
$$\exists x \, \exists y \, (*)$$
$$\forall y \, \forall x \, (*)$$
$$\forall y \, \exists x \, (*)$$
$$\exists y \, \forall x \, (*)$$
$$\exists y \, \exists x \, (*)$$

כך נוצרו שמונה צרופים שונים של בעיות, שאמנם חלק מהן שקולות. אם המשוואה שהייתה רשומה הייתה $x^2 - y^3 + z^4 + 3 = 0$ אז בדרך זו היו 48 =6*8 בעיות שאפשר לשאול על המשוואה. באופן כללי עבור משוואות הנוצרות בשיטה זו , עם n משתנים יש $2^n * n!$ בעיות שונות שאפשר לשאול ע״י שינוי סדר המשתנים ווריאציות על הכמתים. למשוואה $x^2 - y^3 + z^4 - t^2 + u^7 + s^{11} - w + r^9 + 1 = 0$ יש בדרך זו 10,321,920 בעיות שונות שאפשר לשאול, ואם המקדם של x במשוואה יהיה 2, נקבל עוד כמות כזו של בעיות וכן הלאה...

כמה בעיות נפתרו עד היום בהיסטוריה של המתמטיקה? קשה לחשב במדויק, אבל אפשר לנסות ולהעריך את סדר-הגודל. נניח שבממוצע לכל בעיה הוקדש עמוד מתמטיקה שלם, ונניח גם שכל העמודים בספרים מכילים בעיות שונות. על-פי הנחות אלו נקבל ש- 17,280 ספרים בעלי 200 עמודים מכילים כ- 3.5 מיליון בעיות שונות, אשר נפתרו במהלך 3,000 השנים האחרונות של המתמטיקה. נניח גם שיש עוד כמות משולשת של ספרים במתמטיקה, כך שעד היום נפתרו ופורסמו לא יותר מ- 10 מליון בעיות מתמטיות שונות. זה הרבה מאוד, אך על פני מרחב כל האפשרויות, הבעיות שנפתרו הן הרי רק כטיפה אחת בים האפשרויות של השאלות.

באלפי השנים של היצירה המתמטית הצטבר ידע רב, שבא לידי ביטוי בפיתוח של תחומים שונים במתמטיקה, הגדרות ומשפטים. המוקד של העשייה המתמטית הוא, כאמור, הניסיון של מתמטיקאים לפתור בעיות ושאלות. אלו יוצרים עבור המתמטיקאי את המוטיבציה ליצירה. הבעיות אשר מתמטיקאים התמודדו אתן לא נבחרו באופן אקראי מתוך אין- סוף האפשרויות. ההתמקדות בשאלות אלו דווקא ולא באחרות נובעת ממשהו מיוחד שיש בהן. מה הם המהות והייחוד של הבעיות אשר נפתרו, על פני המרחב האין סופי של הבעיות האפשריות? כי הרי שאלה זו מבטאת משהו עמוק על מהות המתמטיקה.

מה הופך בעיה מתמטית אחת למעניינת יותר על פני שאלות אחרות זוהי היא שאלה מתמטית מעניינת בפני עצמה. ויש גם אוקיאנוס שלם של בעיות מתמטיות שטרם פגשנו בהן. בכל התבוננות על העולם הן יכולות להתגלות, וברגע שנבחין בהן הן יראו כמו... טיפה בים.

בעיה פתוחה

בעיה פתוחה במתמטיקה היא שאלה שעדיין אין עליה תשובה. היא זו היוצרת אצל מתמטיקאים מוטיבציה לגילוי, כמיהה לפתור בעיה שאף אחד טרם הצליח לפתרה. הנה מספר בעיות פתוחות במתמטיקה, אשר ניסוחן פשוט יחסית. סיפור הסביבון מעלה שאלה פתוחה נוספת - האם תיתכן יצירה מתמטית משמעותית שאינה מונעת על-ידי הדחף לפתרון של בעיות פתוחות?

הסביבון

פילוסוף פלוני היה משוטט תמיד במקום שבו שיחקו ילדים. בראותו ילד עם סביבון, מיד היה שם לו מארב. אך היה הסביבון מתחיל סובב, מיד היה הפילוסוף רודף אחריו לתפסו. ולא אכפת לו כלל שהילדים רועשים ומבקשים להרחיקו מאותו צעצוע שלהם. בתפסו את הסביבון בעודו סובב, היה מאושר, אך לרגע קט בלבד, ומיד היה משליכו ארצה ומסתלק. שעל כן סבור היה, כי ידיעת כל פרט, ובכלל זה גם סביבון סובב, די בה כדי לדעת את מכלול כל הדברים. לפיכך לא עסק בבעיות הגדולות, דבר זה בלתי חסכוני היה בעיניו. אילו היה הפרט הקטן שבקטנים ידוע, ממילא היה הכל ידוע, על כן לא עסק אלא בסביבון הסובב. וכל אימת שנעשו הכנות לסיבוב הסביבון, היה זה מקווה שהפעם יעלה הדבר בידיו. וכשהיה הסביבון סובב, הייתה התקווה הופכת בו מתוך המרוצה חסרת הנשם לוודאות, אך בעמדו אחר-כך ובידו גזר עץ טיפשי, הייתה תוקפת אותו בחילה , וקול צווחת הילדים, שעד כאן לא שמע אותו ועתה עלה פתאום באוזניו, היה מניסו משם והלאה , והוא מדדה כסביבון ששוט מגושם מצליף בו.

פ' קפקא

.1	בעיית קטלן: האם יש שני מספרים עוקבים שהם חזקות מלבד 8 ו 9 ?
.2	האם יש אין- סוף זוגות של מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2?
.3	האם קיימת תיבה שכל הצלעות והאלכסונים שבה הם מספרים שלמים ?
.4	האם קיימת עקומה סגורה שיש לה שתי נקודות שהן במרחק שווה מכל הנקודות בעקומה .?
.5	האם כל מספר זוגי הוא סכום של שני מספרים ראשוניים?
.6	האפשרי ביקור המלכה בכל הנקודות רק פעם אחת בלוח שחמט בסדר של ריבוע קסם ?
.7	האם כל אין-סוף המלבנים בגודל 1/(k+1) x 1/k משלימים את ריבוע היחידה ?
.8	האם לכל מספר שלם גדול מ - 1 קיימים שלשה מספרים שלמים המקיימים 4/n=1/x+1/y+1/z ?
.9	האם קיים מספר משוכלל אי -זוגי ?
.10	האם קיימת נקודה במישור שהיא במרחקים רציונליים מארבע פינות ריבוע היחידה ?
.11	מהו הסכום ... 1+1/8+1/27+1/64+1/125+
.12	האם כל מסלול של כדור ביליארד בתוך משולש הוא מחזורי ?
.13	האם קיימת קבוצה במישור שכל קבוצה הקונגורנטית לה מכילה בדיוק נקודת סריג אחת ?
.14	האם קיימים שני זוגות של טבעיים שונים, כך שסכום החזקות החמישיות של כל זוג שווה ?
.15	האם ייתכן שקירוב של מספר מעגלים שווים יגדיל את השטח המשותף שלהם ?
.16	האם כל מספר גדול מ- 454 הוא סכום של שבע או פחות חזקות שלשיות חיוביות ?
.17	האם קיים משולש עם צלעות, שטח ואורכי מרדיאנים שכולם שלמים ?
.18	איך למקם 13 ערים על כדור כך שהמרחק המינימלי בין כל שתי ערים יהיה מכסימלי ?
.19	האם בין כל שני ריבועים סמוכים יש תמיד מספר ראשוני ?
.20	מתחילים סידרה ממספר טבעי כלשהו , מספר זוגי מחלקים ב- 2 ואי- זוגי מכפילים ב- 3 ומוסיפים 1 האם תמיד נגיע ל 1- ?
.21	בהינתן עקום סגור ופשוט במישור, האם תמיד אפשר למצוא עליו ארבע נקודות שיוצרות ריבוע ?
.22	האם מספר התמורות על N עצמים ועוד אחד יכול להיות ריבוע (N>7) ?
.23	האם אפשר לבטא את 3 כסכום של 3 חזקות של 3 ביותר מ 2 אפשרויות ?
.24	מה התנאים לכך שמשולש שצלעותיו a1 a2 a3 ייכנס למשולש שצלעותיו b1 b2 b3 ?
.25	האם כל מספר שלם הוא סכום של ארבע חזקות שלישיות ?
.26	האם לכל N יש נקודות במישור, כך שמרחק אחד מתקבל פעם אחת מרחק אחר מתקבל 2 פעמיים וכו׳ ?
.27	האם קיים קבוע A , כך שכל קבוצה בשטח A חייבת להכיל שלשה קודקודי משולש ששטחו 1 ?
.28	האם קיימים אין -סוף מספרים ריבועיים שיש בהם רק שתי ספרות עשרוניות שונות ?

רוח מתמטית

כדי לבנות מבנים מפוארים נאלצו המצרים העתיקים לשרטט משולשים ישרי-זווית. לשם כך הם נהגו לשרטט משולשים שאורכי הצלעות שלהם היו 3,4,5 בהתאמה או משולשים אחרים, למשל 5,12,13 . בימיו של פיתגורס הוכח "משפט פיתגורס" האומר שכל שלושה מספרים המקיימים את היחס $a^2+b^2=c^2$ יוצרים משולש ישר-זווית, וגם ההפך מכך הוא נכון. שלשה פיתגורית היא שלשה של מספרים שלמים, אשר מקיימים את היחס הזה. ידוע גם כי קיימים אין- סוף שלשות שכאלה.

משפט פיתגורס מתרגם מתחום הגיאומטריה לתחום של המספרים. הוא שימושי במיוחד אם רוצים לחשב אורכים ומרחקים בין נקודות. בכל מבנה מתמטי בעל ממדים הניצבים זה לזה, יש חשיבות ויישום של משפט זה. יש תחומים רבים במתמטיקה שנעשה בהם שימוש במשפט פיתגורס. למשל בנוסחאות המופיעות בתורת הייחסות, ובחישובי הסתברויות ואי-ודאות בתורת הקוונטים. משפט פיתגורס הוא אחד המשפטים החשובים שהתגלו עד היום בשדה המתמטיקה, משום שהוא מבטא את האחדות שנוצרת ממרכיביו של השלם.

התבוננות נוספת במשפט פיתגורס הביאה מתמטיקאים לשאול את השאלה, מה יקרה אם במקום חזקה שנייה במשוואה $a^2+b^2=c^2$ תהיה חזקה אחרת, למשל 3 או 4 וכו'. האם קיימות שלשות כאלה עבור חזקות שונות מ 2 ? $a^n+b^n=c^n$. לפני כ- 400 שנים כתב פרמה בשולי ספר מתמטיקה כי מצא הוכחה מופלאה לכך שאין שלשה שכזו, אך מפאת קוצר המקום בשולי הספר הוא לא הביא את ההוכחה. בעיה זו העסיקה מתמטיקאים שנים רבות בניסיון להוכיח או להפריך את טענת (השערת) פרמה. בשנת 1994 פתר מתמטיקאי אנגלי א' ויילס את הבעיה. הוא הוכיח שפרמה צדק. מאמץ בן 400 השנים והוכחה של ויילס המשתרעת על יותר ממאתיים עמודים מעלים שאלה חדשה האם פרמה אכן מצא הוכחה פשוטה למשפט.

זווית התבוננות במשפט פיתגורס	שאלה חדשה מהסוג "מה אם לא"
מדובר בחזקה שנייה	מה אם יהיו חזקות שלמות אחרות ? מה אם החזקות יהיו לא שלמות או שליליות ?
מדובר במשולש	אלו יחסים שמתקיימים במרובעים או יותר צלעות ?
במשוואת פיתגורס פעולת החשבון היא +	מה קורה עם פעולות אחרות , למשל כפל ?
מדובר בזווית ישרה	אלו יחסים במשולש חד זווית או קהה- זווית ?
היחס במשוואה הוא =	מתי מתקיימים היחסים > או < ?

ניתן להתבונן במשפט פיתגורס גם מנקודות מבט נוספות. כך מתגלות אפשרויות חקירה וגילויים נוספים הנובעים ממנו. כל שאלה כזו יכולה להיות פתח למחקר ולגילוי חדש במתמטיקה. משפט פיתגורס הוא אורח מקובל בכל אחד מתחומי המתמטיקה.

בדרך זו אפשר להתבונן במשפטי המתמטיקה הידועים. התבוננות במשפט מתמטי אשר כבר התגלה והוא ידוע ומוכר . שאלה על כל אחד מהפרטים שבו : "מה אם לא? מה אם יהיה אחרת? איזו חוקיות תתגלה ?". כך אפשר לצאת מן הידוע ולצאת להפלגה אל הלא- נודע. במסע זה נגלה לעתים יבשת חדשה של הבנה. המשולש ישר הזווית של פיתגורס הופך בדרך זו כמו למפרש של סירה, אשר בה נוכל לחוש בתנועתה של הרוח המתמטית.

חיבור עצמי

גם בעיתונים המתחלפים מדי יום יש משהו נכון, קבוע ולא משתנה. חידות ותרגילי חשבון שבהם מחליפים את הספרות באותיות. הקוראים מתבקשים לגלות ערכים מספריים שיתאימו לתרגיל. בתרגיל שלהלן מבקשים מאתנו למצוא את ערך הספרות a,b,c,d,e , כך שהתרגיל יתקיים.

$$\begin{array}{r} abbcd \\ +\ \underline{debcd} \\ cbdce \end{array}$$

התבוננות בספרה הרביעית למטה מימין מלמדת ש e הוא 0 או 9 . אבל הספרה הראשונה מלמדת ש e נוצר מפעמיים d , ולכן הוא חייב להיות זוגי. מכאן נובע ש- e=0 , ומכאן d=5 . אנו ממשיכים ומוצאים את הפתרון:

$$\begin{array}{r} \mathbf{42,295} \\ +\ \underline{\mathbf{50,295}} \\ \mathbf{92,590} \end{array}$$

לתרגיל זה יש פתרון יחיד, אך באופן עקרוני לכל תרגיל כזה 3 שלוש אפשרויות.

1- שאין לו בכלל פתרון.

2- שיש לו פתרונות אחדים.

3- שיש לו פתרון יחיד.

דסבבש **+ <u>דסנהד</u>** **הסדבס**	**שמש** **+ <u>מימ</u>** **צמח**	**אחד** **+ <u>אחד</u>** **שתיים**
זהו התרגיל הקודם בשינוי אותיות לעברית, לפיכך הפתרון זהה.	כאן כתיבת התרגיל היא תוך שימוש במילים בעלות משמעות.	תרגיל עם מילים שהן בעצם מספרים. לתרגיל זה אין בכלל פתרון.

אל כדור הארץ מגיע יצור מתרבות אחרת, הוא מכיר את שיטת ייצוג המספרים בבסיס 10, אך לא את הסימול המיוחד של הספרות שאנחנו בחרנו. הוא מקבל לידיו תרגיל חשבון המופיע בעיתון, והוא מנסה לפענח את משמעות הסמלים. אם קיים לתרגיל פתרון יחיד כשאלה וגם כתשובה , הוא יוכל לפענחו אך ורק מהתבוננות בסמלי התרגיל. חידת אותיות בחיבור ספרות שקיים לה פתרון אחד בלבד נקרא "**חיבור עצמי**".

נתבונן במה שנכתב בעמוד זה: הספרות המתמטיות והאותיות העבריות. האם ניתן להחליף באופן שיטתי, כמו צופן אותיות , את כל האותיות בעמוד זה וגם את הספרות, ולקבל לבסוף עמוד אחר עם משמעות? בטקסט שהוא די ארוך, הסיכוי לכך הוא אפסי. מערכת הסמלים בעמוד זה מגדירה במבנה ובצורה שלה את כל מה שכתוב בה. באיזו מידה הצורה של יצירה מכילה את משמעותה? בדרך-כלל נראה לנו שלא ייתכן הדבר, כי צריך קודם לדעת את הצופן שמפענח את משמעות הסמלים. אך אפשר בהחלט שיצירה מסוימת משמעותה מקופלת כבר בצורתה.

נתבונן בעולם שבו אנחנו חיים. האם הצורה שמתגלה בו במראה מקפלת גם את משמעותה הפנימית ? האם קיים קשר בין הצורה של השפה המתמטית לבין המשמעות האמיתית שלה? אם אכן כך, אפשרי שכל שאלה מכילה בתוכה גם את פתרונה. בהתבוננות מעין זו העולם הופך כמו חידת החיבור משאלה לתשובה. כשנצליח להתבונן במהופך ולגלות שאלה המסתתרת מאחורי תשובה - נבצע חיבור עצמי.

קצת דמיון

שני משולשים נקראים דומים, אם היחס שבין אורכי הצלעות שלהם בהתאמה הוא קבוע. לדוגמה משולש שאורכי הצלעות שלו 3,4,5 דומה למשולש 6,8,10 כי היחס בין כל שתי צלעות בהתאמה הוא 2. שני משולשים דומים הם שווים גם בזוויות שלהם בהתאמה. וגם ההפך הוא נכון, כלומר שני משולשים שהזויות שלהם זהות בהתאמה, הם דומים.

אפשר להעתיק את תכונת הדמיון גם למספרים טבעיים. בין שני המספרים 1324 ו - 456 קשה למצוא דמיון כלשהו אבל בין 1324 ל 2564 יש דמיון מסוים, כי מדובר בשני מספרים בעלי ארבע ספרות שהן שונות. באותו אופן שני המספרים 233 ו- 566 קיים ביניהם דמיון, כי הם בעלי אותו מספר ומבנה פנימי של ספרות. הוא הדין לגבי המספרים 1223, 4335 וגם 456563, 239391 הדומים מבחינת מבנה הספרות שלהם. לעומת המספרים 232 , 432 אשר אינם דומים. נגדיר אם כך יחס דמיון שבין שני מספרים, אם מבנה הספרות שלהם זהה, נסמן אותו ע"י ~ כלומר 121~ 343 או בהפשטה x ~ y.

1233244 ~ 5466499

למספר 5 יש תשעה מספרים דומים וכן למספר 7 , כמו כן כל שני מספרים בעלי ספרה אחת הם דומים. למספר 23 יש 81 מספרים דומים, כי אלו כל המספרים שהם בעלי שתי ספרות שונות זו מזו. למספר 111 יש תשעה מספרים דומים, ואלו הם כל המספרים בעלי שלוש ספרות זהות. נגדיר את פונקציית הדמיון כפונקציה מתמטית, אשר מונה לכל מספר טבעי כמה מספרים טבעיים אחרים קיימים שהם דומים לו. נסמן את הפונקציה הזו באמצעות סוגריים מרובעים. [ ] כך ש [n] הוא מספר המספרים הדומים ל- n .

[2343]= 648 [3214]=4536. [4536]=4536 כלומר מספר המספרים שדומים לו שווה לעצמו. למספר בן 5 ספרות יש, 27,216=6*7*8*9*9 מספרים שדומים לו. באופן כללי אם ל n יש d ספרות שונות זו מזו אז יש a(d)= 9*9*8*7*...*(11-d) מספרים דומים עבור d>1. מאחר ולמספר כלשהו יש לכל היותר 10 ספרות שונות פונקציית הדמיון יכולה לקבל רק עשרה ערכים שונים לכל היותר. נסמן אותם ב a1,a2,a3,...,a10 , כאשר a1=9 a2=81 a3=648 a4=4536 וכו' .

סדרת מספרים שכל איבר בסדרה הוא פונקציית הדמיון של הקודם תיקרא סדרת דמיון. לדוגמה: 12324579, 136080 , 27216, 4536, 4536, ... למעט האיבר הראשון בסדרת דמיון, כל שאר המספרים הם מסדרת הערכים ai. לקבוצת המספרים הללו נקרא מספרי דמיון. שכל סדרה דמיונית מתכנסת בסופו של דבר אל אחד מבין ארבעת הערכים הדמיוניים הראשונים 9, 81, 648, 4536 . אבל שלשת הערכים הראשונים מתקבלים רק בתנאי שלמספר יש פחות מארבע ספרות שונות. עבור מספרים די גדולים אפשר להגיד שבהסתברות השואפת ל- 1 כל סידרה דמיונית מגיעה לאחר לא יותר משלושה צעדים למספר הדמיון:

4536

כל דיאלוג בשפה הוא עשיר בדימויים ובמטאפורות. תנועת המחשבה עוקבת אחר מטאפורות של הדמיון. אפשר כי אלו הולכות ומתכנסות בסופו של התהליך למשהו ברור וממוקד. נקודת התכנסות תענה לחוקים הקשיחים של ההיגיון. הגענו אליה בדרך לא שגרתית, ואפשר שנגלה כי התוצאה שהתקבלה היא יצירה חדשה. משהו שלא היינו יכולים להגיע אליו במעבר על כל הצירופים האפשריים אלא עם, קצת דמיון.

מחשב מתמטיקה

כדי לחבר שני מספרים למשל 3 ו - 4 משתמשים לפעמים ילדים באצבעות. הם סופרים ביד אחת שלוש אצבעות, אחר-כך הם סופרים ארבע אצבעות ביד אחת ואצבע ביד השנייה ואחר-כך הם סופרים את כל האצבעות ביחד ומקבלים את התוצאה 7 . אחר-כך הם לומדים בעל-פה את כל החיבורים של מספרים בני ספרה אחת. בכיתות גבוהות יותר הם כבר לומדים לחבר מספרים גדולים יותר, למשל 23 עם 34 , כדי לעשות את זה הם כותבים מספר מתחת למספר ומחברים ספרה עם ספרה, פעולה שכבר זכורה להם. אם התוצאה גדולה מ- 9 , הם מעבירים 1 למספר שמשמאל. בדרך זו ילדים ומבוגרים לומדים לחבר כל שני מספרים.

אלגוריתם הוא שיטה קבועה ומכנית לפתרון של בעיות. מדובר בדרך שבה יש הוראות ברורות וקבועות לפעולה עם הנתונים בתהליך.כיצד לפעול עם הנתונים בתהליך . בכל שלב יתכן שיש נקודות צומת של החלטה כמו במקרה החיבור שסכום הספרות גדול מ 9 ואז נוהגים אחרת. אבל בסופו של דבר האלגוריתם מביא אותנו תמיד לפתרון הבעיה. למשל, קיימים אלגוריתמים שונים לחיבור שני מספרים, לכפל, לחילוק ולחיסור. איננו אנחנו מסוגלים לפתור את הבעיות הללו עבור מספרים גדולים אלא בשיטה של אלגוריתמים. אבל במהלך השנים התפתחו אלגוריתמים רבים לפתרון בעיות רבות ומגוונות, כמו למשל מציאת מספרים ראשוניים, מציאת מכנה משותף בין מספרים ועוד רבים אחרים. בשנת 1938 הגה המתמטיקאי טיורינג את הרעיון של מכונה דמיוניות, אשר מסוגלת לבצע בכוחות עצמה אלגוריתמים. המכונה הייתה פשוטה למדיי, והיא כללה מעין קובייה הנעה סרט נייר אין-סופי שעליו רשומות הספרות 1 או 0 . בכל רגע המכונה יכולה לזהות את המספר שרשום מתחת לקוביה , ובהתאם למצב מסוים שהיא נתונה בו, היא מחליטה אם לנוע ימינה, שמאלה או לרשום 1 או 0 ולאיזה מצב חדש להגיע. לכל מכונת טיורינג כזו יש תכנית קבועה מראש המכתיבה לה בכמה מצבים שונים היא יכולה להיות ואיך לנהוג בכל מצב, כשהיא רואה את המספר הרשום למטה. באמצעות מכונת טיורינג אפשר לבצע חיבור וכפל של מספרים הרשומים על הסרט ולממש אלגוריתמים רבים. לאחר הגילוי הזה של טיורינג שסייע בפתרון בעיות שונות בתחום הלוגיקה המתמטית, התפרסם טיורינג בהובילו קבוצה שלמה של מתמטיקאים לפיצוח צופן מכונת האניגמה, ששימשה את הגרמנים במלחמת העולם השנייה.

בניית המכונה הדמיונית קידמה בניית מכונה ממשית, שתוכל לבצע אלגוריתמים. כל זאת בעקבות מודל אחר אשר פיתח פון-ניומן העושה שימוש ברעיון, שזיכרון המכונה מכיל גם את הנתונים וגם את התכנית לביצוע האלגוריתמים. כך הלכו ונבנו מחשבים בחמישים השנים האחרונות, שיכולת הביצוע שלהם הולכת ומשתכללת. כיום המחשבים יכולים לשחק שחמט ולנצח אלופי עולם, הם פותרים בעיות מסובכות, והכלכלה בעולם נסמכת על פעולתם, עש שהיה חשש במעבר לשנת אלפיים אלף כי בגלל הבאג ישובשו מערכות חיים שלמות. יש אם כך מעין תחושה שפוצח אותו צופן של האורקל מדלפי, שהצליח לפתור ולענות על כל שאלה שהוצבה לפניו. המפתיע אולי בכל הסיפור הזה הוא בכך שניתן להראות שברמה העקרונית כל מה שמחשבים יכולים לבצע היום מבחינת חישובים מתמטיים, גם מכונת טיורינג הפשוטה יכולה לבצע. הפתרון לצופן של האורקל מדלפי אם הוא אפשרי או של התודעה האנושית בכלל אינו באמצעות בנית מכונות ההולכות ומשתכללות יותר בחיקוי פעולת החשיבה, אלא דווקא בכיוון ההפוך. אם נצליח לתאר באופן שלם פעולת חשיבה אחת פשוטה, למשל איך ילד מבצע חיבור של שני מספרים באמצעות הגדרה מכנית דומה לזו שהצליח לעשות טיורינג.

זיהוי סמלים הרשומים על נייר, תנועה ימינה ושמאלה, רישום של סמלים אחרים בהתאם למה שנראה ומעבר מסוג אחד של תנועה לסוג אחר של תנועה בהתאם. הפעם לא מדובר בקובייה שהיא חסרת תודעה כפי שהגה טיורינג, אלא באדם המבצע פעולות פשוטות עם סמלים, ובאמצעותם הוא מצליח לתאר את האופן שבו נוצרת המתמטיקה.

משל קטן

הסופר הצ׳כי פרנץ קפקא נודע במשלים שכתב על החיים. בחיים עצמם היה כמעט אלמוני. חברו מכס ברוד הכיר אותו באמת ואת כשרונו הרב. קפקא ביקש ממנו לשרוף את כתביו, אבל חברו החליט לא להיענות לבקשתו. מעשה זה מבואר במשל הבא של קפקא:

העצים

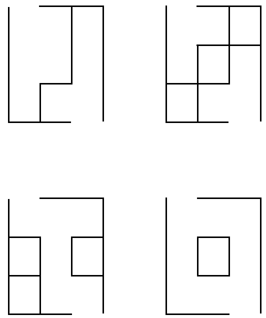
שכן דומים אנו לגזעי עצים בשלג. למראית עין, מוצבים הם על פני חלקת השלג, ובדחיפה קלה ניתן להזיזם. לא, אי- אפשר לעשות זאת, משום שהם אחוזים היטב באדמה. אך ראה , גם זה אינו אלא למראית עין.

במקום אחר נמצא משל קטן
ובו דימוי של החיים כמבוך.

משל קטן

״אהה״ אמר העכבר, ״מיום ליום הולך העולם וצר . תחילה היה רחב עד להפיל אימה, רצתי הלאה ומה שמחתי כשראיתי לבסוף מרחוק חומות מימין ומשמאל, אך חומות ארוכות אלו אצות כל-כך להתחבר זו עם זו, עד שהנה כבר הגעתי לחדר האחרון, ושם בפינה האחרונה עומדת המלכודת ולתוכה אני רץ. ״אינך צריך אלא לשנות את הכיוון״ אמר החתול ובלעו.

אפשר לשרטט את המבוך מריבוע בגודל 3x3 יחידות בסיסיות. הכניסה למבוך היא למעלה בצד שמאל, והיציאה המיוחלת למטה בצד ימין. בפנים הריבוע צלעות פנימיות. השאלה היא האם מי שנכנס אליו יוכל לצאת.



במבוך מעין זה יכולות להיות עד 12 צלעות פנימיות. עלינו להחליט עבור כל צלע כזו האם היא קיימת. יש אם כך שתי אפשרויות בחירה לכל צלע ובסה״כ 2*2*2...*2 , כלומר בסה״כ 2 בחזקת 12 מבוכים אפשריים שזה 4,096 אפשרויות. אם נייצג צלע פנימית ב 0 או ב- 1 בהתאם לקיומה במבוך, תימצא התאמה בין מבוכים לכל המספרים בין 0 ל4,096 . מבין 4,096 המספרים הללו שמייצגים מבוכים, האם יש יותר מבוכים שניתן לעבור בהם מהכניסה ליציאה או כאלה שאי-אפשר לעשות זאת?

כל בעיה מתמטית היא סוג של מבוך. פתרון הבעיה וההוכחה שלו נמשלים למציאת המסלול ההגיוני, שמביא אותנו מנקודת הכניסה שהיא ניסוח השאלה אל נקודת היציאה שהיא הפתרון. בשעה שהמתמטיקאים פותרים בעיות, הם מחפשים מסלולי יציאה ממבוך המוגדרים באמצעות הנחות השאלה. לשאלה אם למבוך נתון יש פתרון אפשר לענות באמצעות התבוננות ממד נוסף מלמעלה על המבוך. השאלה העולה מתוך כל המשל הזה היא האם קיימת דרך כללית, המאפשרת יציאה לממד האחר כדי לראות באופן ישיר פתרון של שאלה מתמטית תוך התבוננות עליה בדרך אחרת.

זמן מתמטי

כרונולוגיה של תאריכים וגילויים חשובים בתחום של המתמטיקה.

1700- לפנה"ס	מתמטיקאים מצרים	יישום של שברים פרימיטיביים שהמונה שלהם הוא 1
530- לפנה"ס	פיתגורס	יחסים גאומטריים, פרופורציות , והרמוניות מוזיקליות
370-לפנה"ס	אריסטו	יסודות הלוגיקה והחשיבה ההגיונית
300- לפנה"ס	אוקלידס	לימוד הגיאומטריה וביסוסה באופן אכסיומטי
260- לפנה"ס	ארכימדס	חישוב פאי בשתי ספרות, וחישוב השטח מתחת לפרבולה
200- לפנה"ס	אפולוניוס	הגדרת חתכי חרוט, והגדרה של אליפסה, פרבולה, והפרבולה
250	דיופנטוס	ספר האריתמטיקה וטיפול שיטתי ראשון באלגברה
550	מתמטיקאים הודים	המצאת השימוש ב- 0 להצגה של מספרים
1202	פיבונצי	סדרת פיבונצי
1520	פארו	פיתוח שיטה לפתרון של משוואות ממעלה שלישית
1540	פארארי	פיתוח שיטה לפתרון משוואה ממעלה רביעית
1614	נאפיר	המצאת הלוגריתמים
1617	בריגס	לוגריתמים לפי בסיס 10
1619	דקארט	המצאה של גאומטריה אנליטית
1634	רוברוול	חישוב השטח מתחת לציקלואידה הוא פי שלשה מהמעגל היוצר
1637	פרמה	טוען שהצליח להוכיח את מה שכונה אחר-כך השערת פרמה
1654	פסקל ופרמה	המצאת תורת ההסתברות
1658	ורן	אורך הציקלואידה הוא פי ארבעה מאורך קוטר המעגל היוצר אותה
1665	ניוטון	המצאה של חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי
1668	מרקטור וברונקר	פיתוח של טור לחישוב פונקציית הלוגריתמים
1671	גרגורי	פיתוח של טור לחישוב היפוך פונקציית הטנגנס
1673	ליבניץ	פיתוח החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי
1675	ניוטון	פיתוח אלגוריתמים למציאת שורשים של פונקציות
1691	ליבניץ	הפרדת משתנים בפתרון של משוואות דיפרנציאליות רגילות
1712	טיילור	פיתוח של טור טיילור לחישוב של פונקציה באמצעות הנגזרות
1722	דה-מואבר	משפט-דה מואבר על חזקות של מספרים מרוכבים
1734	אוילר	פיתוח כופלי אוילר לפתרון משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון
1736	אוילר	פתרון של בעיית הגשרים בקניגסברג, התחלה של תורת הגרפים
1739	אוילר	פתרון כללי של משוואות דיפרנציאליות לינאריות והומוגניות
1742	גולדבאך	השערה שכל מספר זוגי ניתן לכתיבה כסכום שני ראשוניים
1744	אוילר	הוכחה שקיים מספר לא אלגברי (טראנסדנטאלי)
1761	באייס	הוכחה של משפט באייס על הסתברות מותנה
1796	גאוס	שרטוט מצולע משוכלל בעל 17 צלעות בסרגל ומחוגה , והכללה
1797	ואסל	קישור של מספרים מרוכבים כווקטורים וחקירה גאומטרית שלהם
1799	גאוס	המשפט היסודי של האלגברה- לכל פולינום יש שורש מרוכב

1807	פוריה	הצגה של פונקציות באמצעות פונקציות טריגונומטריות
1811	גאוס	אינטגרציה על עקומים מרוכבים
1817	בולצנו	משפט בולצנו-פונקציה רציפה שעוברת משלילי לחיובי מתאפסת
1824	אבל	הוכחה חלקית שאין פתרון כללי למשוואה ממעלה חמישית ומעלה
1822	קושי	משפט קושי על חישוב אינטגרל מרוכב מסביב למלבן
1825	לירכלה ולזנדר	הוכחה של השערת פרמה עבור חזקה 5
1828	גרין	הוכחה של משפט גרין על פונקציות גזירות ממימד גבוה
1829	לובצובסקי	פיתוח של גאומטריה היפרבולית לא אוקלידית
1832	גלואה	מציאת תנאים כלליים המאפשרים פתרון של משוואות אלגבריות,
1832	דיריכלה	הוכחה של השערת פרמה עבור חזקה 14
1837	ונסטל	הכפלת נפח קובייה וחילוק זווית ל- 3 אינם אפשריים בסרגל ובמחוגה
1843	לורן	פיתוח של פונקציה באמצעות טור לורן
1843	המילטון	גילוי הקוטאריונים והעובדה שהם חוג לא קומוטטיבי
1847	בול	ביסוס פורמלי של הלוגיקה
1850	סטוק	הוכחה של משפט סטוק
1854	רימן	פיתוח של גאומטריה רימנית
1858	מביוס	גילוי של רצועת מביוס
1870	קליין	ביסוס אנליטי לגאומטריית לובצובסקי ואי-תלות באכסיומה החמישית
1873	הרמיט	הוכחה שבסיס הלוגריתמים הטבעיים אינו מספר אלגברי
1873	פרובניוס	פתרון משוואות דיפרנציאליות לינאריות עם רגולריות בסינגולריות
1882	לינדמן	פאי הוא מספר טראנסדנטאלי ולכן גם לא ניתן לרבע את המעגל
1882	קליין	גילוי של בקבוק קליין
1896	הדמר ופואסון	משפט המספרים הראשוניים על הצפיפות היחסית שלהם.
1899	הילברט	ביסוס אכסיומטי של הגאומטריה
1900	הילברט	הצגה בכנס בפריס של 23 בעיות פתוחות במתמטיקה
1903	רונג	אלגוריתמים מהיר לחישוב טרנספורם פוריה
1908	צרמלו	הגדרת האכסיומות לתורת הקבוצות
1912	בראור	משפט בראור על נקודת השבת של פונקציה רציפה
1914	רמנוגן	פונקציות מודולריות וקרובים של פאי
1928	פון-ניומן	המצאת תורת המשחקים
1931	גדל	משפטי אי -השלמות של גדל
1948	פון-ניומן	ניתוח מתמטי של מכונה הבונה את עצמה
1948	שנון	מושג האנטרופיה ותורת האינפורמציה
1960	הורה	אלגוריתים מהיר לסידור של וקטור מספרים
1960	רייד וסלומון	פיתוח של אלגוריתים ריד סלומון לתיקון שגיאות
1976	הפל ואקן	פתרון באמצעות שימוש במחשב של בעיית ארבעת הצבעים
1983	פלטין	הוכחת השערת מורדל לקשר בין מספר שורשים לגנוס המשוואה
1993	ויילס	פתרון של השערת פרמה באמצעות הוכחת השערת טינמן שימורה.

הגדרת מתמטיקה

אני יושב מול מעבד התמלילים, מתבונן וכותב על תמצית המתמטיקה שכתובה מולי. כשאני אומר "מתמטיקה", משהו בתוכי מתאפשר. רמז ליכולת של התבוננות מתמטית שניתנת להתבהר. להתבונן בטקסט מתמטי ולחוש אווירה שנובעת ממנו. לכל תחום מתמטי יש ייחוד משל עצמו, מעבר למשפטים הכלולים בו. מוזיקה פנימית אשר מהדהדת בשעה שמתעסקים בתחום המתמטי הספציפי.

בצד כתיבה הדומה יותר לשירה, חייבת להיות גם התחברות לשפה מתמטית רגילה. לפעולות המקובלות כדי שיתפתח דיאלוג פורה. את היצירה המתמטית אפשר לתמצת כך :

מתמטיקאים, יצרו משפטים ותחומים כפתרון של בעיות והותירה עדיין בעיות לא פתורות.

האם קיימת תנועה אחרת של התבוננות, אשר בה ייהפך אוסף הפרטים הנפרדים הללו למשהו חי יותר? סימטרייה חדשה אשר תהפוך את הייצוג מילולי הזה לתנועת התבוננות שהיא עמוקה יותר?

למשל:

מתמטיקה מתארת באופן שלם
את מה שהמתמטיקאים עושים

אבל, אוילר, ארכימדס, אויקלידס, ארדוש, בנך, ברנולי, בויל, גלואה, גאוס, גדל, גורדן, דיריכלה, דיקרט, דיופנטוס, הילברט, הרמיט, המילטון, הדמר, האר, וירשטרס,ווינר, וינוגרדוב, וויטהד, טילור, יעקובי, כהן לובצבסקי, לגרנז, לזנדר, לנדאו, לפלס, ליבניץ, ליוביל, ליטלווד, לי, לבג,מרסן, מביוס, מיניקובסקי, ניוטון, ניומן, נטר, פיתגורס, פוריה, פסקל, פואנקרה,, פרובניוס, , פרמה, פיבונצי, צביצפב, צרמלו, קושי, קנטור, פ.קליין , קרונקר, קרדנו, קולמוגורוב, קלי, רמנוגן, רימן, שוורץ, שנון.

אלגברה לינארית, אופטיקה, אינפורמציה, משוואות אינטגרליות, אסטרופיסיקה, אסימפטוטיקה, אופרטורים, מרחבי בנך, בקרה, ביולוגיה, גיאומטריה, גיאומטריה אלגברית, גאומטריה דיפרנציאלית, גרפים, גאופיסיקה, אנליסה גלובלית, משוואות דיפרנציאלוית, דפיפרנציאליות חלקיות, היסטוריה, הסתברות, אנליסה הרמונית, הפרשים, וריאציות, חבורות, חבורות טופולוגיות, חבורות לי,חוגים , חוגים לא אסוציאטיבים, חוגים אסוציאטיבים, חוגים קומוטטיבים, טופולוגיה, טופולוגיה אלגברית, טורים, יריעות, יחסות, כללי, לוגיקה, מספרים, מחשבים, מרוכבים, רב מורכבות, ממשיות, מידה, מכניקה, מכניקה, מכניקה סטטיסטית, מכניקת נוזלים, אנליזה נומרית, סריגים, סטטיסטיקה, סדרות, אנליסת פוריה, פוטנציאל,פונקציונלית, פונקציות מיוחדות, קבוצות, קומבינטוריקה, קמירות, קרובים, קטגוריות, קוונטים, שדות, תאורית K , תרמודינמיקה, תקשורת.

קיימים אינסוף ראשונים, הקשר בין סכום חזקות הרמוני למכפלה הופכים של ראשונים, ריבוע היתר במשולש ישר זוית שווה לסכום ריבועי הניצבים, סכום של משתנים אקראיים שואף להתפלג נורמלית, אין פתרון כללי לשורשי פולינום ממעלה 5 ומעלה, כל מפה ניתנת לצביעה ב 4 צבעים. לא ניתן להוכיח שאין סתירה בתורת המספרים, לא קיים אלגוריתמים לבדיקת עצירה, אינסוף הממשים גדול מאינסוף הטבעיים. האינטגרל והנגזרת הפוכים זה לזה, משוואת אוילר בחשבון וריאציות, קודקודים פחות צלעות ועוד פאות שווה ל 2 , פונקציה רציפה מתחום קומפקטי לעצמו מכילה נקודת שבת, משפט המניה של ברנסד ופוליה, כל חבורת סופית היא חבורת תמורות, משפט קלי המילטון על מטריצות, אפיון של שדות סופיים. משפט מינקובסקי על קבוצות קמורות, קיום ויחידות פיתרונות למשואות דיפרנציאלית, שיטת המיני-מקס. משפט השאריות הסיני, יצוג קנוני של חבורות אבליות, מספר התמורות על נ' עצמים. כל מספר ניתן ליצוג כסכון הופכים של שלמים, כל מספר שלם ניתן לכתיבה יחידה כמכפלה של ראשונים, בכל סידרה חשבונית אין ראשונים בכלל או שיש אינסוף, משפט ההדדיות של גאוס, יש מסלול שלם בגרף אם ורק אם הערכיות של כל קודקוד זוגית למעט אולי 2 קודקודים, משפט הסינוסים, משפט דימואבר, המשפט היסודי של תורת האינפורמציה, משפט לויצקי עמיצר בחוגים, 2 מרחבים אוקלידים מאותו מימד הם שקולים, דואליות במרחבי בנך. שקילות חבורה יסודית בקשרים, קיום ואי קיום של שדה וקטורי על ספירה, בסיס הלוגריתמים הטבעי אינו אלגברי, בעית הסיפוק של ביטוי בוליאני היא NPc . כל פונקציה מחזורית ניתנת לכתיבה כסכום איסופי של סינוס וקוסינוסים.

. האם יש 2 מספרים עוקבים מלבד 8 ו 9 שהם חזקות, האם יש אינסוף זוגות ראשונים שההפרש ביניהם הוא 2, האם קיימת תיבה שכל צלעותיה והאלכסונים הם שלמים, האם קיימת עקומה סגורה שיש לה 2 נקודות שהן במרחק שווה מכל הנקודות בעקומה, האם כל זוגי הוא סכום של שני ראשונים, האם קיימים איסוף מספרי פיבונצי ראשונים, האם אפשרי ביקור של מלכה על לוח שחמט בסדר של ריבוע קסם, האם פאי ועוד בסיס הלוגריתמים הטבעי הוא מספר אי-רציונלי, האם אינסוף מלבנים א1/ +1א/ 1 משלימים ריבוע יחידה, האם כל שלם גדול מאחד א4 הוא סכום 3 הופכיים, האם קיים מספר משוכלל אי זוגי, האם כל גרף ניתן למספפר את קדקודיו כך שההפרשים בין נקודות סמוכות יהיה שונה, האם קיימת נקודה במישר שמרחקה מארבע פינות ריבוע היחידה הוא רציונלי, מהו זיתא של 3, האם כל מספר מרסן אינו מתחלק בריבוע שלם, האם כל מסלול של כדור ביליארד במשולש הוא מחזורי, האם קיימת קבוצה במישור שכל קבוצה קונגורנטית לה מכילה בדיוק נקודת סריג אחת, האם קיימם 2 זוגות טבעיים שונים כך שסכום החזקות החמישיות שווה, האם יתכן שקרוב מספר צמעגלים שווים יגדיל את השטח נמשותף שלהם, האם יש אינסוף ראשונים שפחות אחד הם ריבוע שלם, האם כל מספר גדול מ 454 הוא סכום של 7 או פחות חזקות שלשיות חיוביות, האם קיים משולש עם צלעות שטח ואורכי מרדיאנים שכולם שלמים, איך למקם 13 ערים על כדור כך שהמרחק המינימילי יהיה מכסימילי, האם תמיד בין 2 ריבועים סמוכים קיים ראשוני, האם כל סדרה שהחוקיות שלה חילוק זוגי ב 2 והכפלה ב 3 הוספה אחת וחלוקה ב 2 אחרת, תמיד מגיע לבסוף ל 1, בהינתן עקום סגור ופשוט במישור האם תמיד אפשר למצוא עליו 4 נקודות שיוצרות ריבוע, האם מספר התמורות על יותר מ 7 עצמים יכול להיות ריבוע, האם אפשר לבטא את 3 כסכום של 3 חזקות של 3 ביותר מ 2 אפשרויות, מהים התנאים שמשולש א יוכל במשולש ב' . האם כל מספר שלם הוא סכום של 4 חזקות שלישיות, האם לכל N יש קבוצת נקודות במישור כך שמרחק אחד מתקבל פעם אחת מרחק אחר מתקבל 2 פעמים וכו'. האם אפשר למצוא 3 מספרים שלמים כך שמכפלתם שווה לסכומם בחזקה שלישית, האם קיים קבוע א כך שכל קבוצה בשטח א חייבת להכיל 3 קוקודי משולש ששטחו 1. האם קיימים אינסוף מספרים ריבועים שיש בהם רק 2 ספרות עשרוניות שונות, האם כל נ נקודות לא קולינאריות מחיבות שיש נקודה השוכנת ב N/3 הקווים הנוצרים, האם קיים b>4 כך ש b בחזקת b ועוד 1 הוא ראשוני.

אמת חדשה

התפתחות המתמטיקה במהלך ההיסטוריה מתאפיינת בדרכים שונות ובשיטות של בניית מערכת הסמלים. כך חלו שינויים אבולוציוניים בתפיסת האמת. בתחילה האמת המתמטית הייתה אמפירית - הגילויים שבה נוצרו על-ידי חקירה של דוגמאות. כך, למשל, גילו המצרים שכל מספר ניתן לכתיבה כסכום הפכיים של שלמים, מה שהביא לשיטת הייצוג המצרית של מספרים :

$$x=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\ldots$$

גילויים אלה הביאו ליצירת אמת אינטואיטיבית הנובעת מתחושה פנימית ומהשראה. לאחר מכן התפתחה במתמטיקה שיטה דדוקטיבית, המפתחת את מושג האמת בזיקה להוכחה מסודרת והגיונית. כך נולד לדוגמה משפט פיתגורס במשולש ישר-זווית $c^2=a^2+b^2$ שבצדו עשרות רבות של הוכחות. הניסיון בן אלפי השנים להוכיח את אכסיומת המקבילים והגילוי של גאומטריה שאינה אוקלידית הביאו את המתמטיקאים להכרה, שישנה אמת מתמטית אכסיומתית. אמת מתמטית אינה אבסולוטית, אלא רק בזיקה לאכסיומות אשר אותן מניחים מראש.

הגילויים של גדל בתחום הלוגיקה המתמטית ומשפטי השלמות ושל טיורינג בתחום החישוביות, כמו למשל בעיית העצירה, נוצרו תוך ראית יכולת ההתייחסות של השפה המתמטית אל עצמה. היה זה מעין פיתוח של פרדוקס השקרן המעיד על עצמו שהוא כזה. כך התגלתה ונוצרה האמת הרפלקטיבית, הנובעת מהיכולת של סמלים וטקסט להתייחס אל עצמם.

ההוכחה של פתרון בעיית ארבעת הצבעים שכל מפה ניתנת לצביעה באמצעות ארבעה צבעים שונים, משתמשת ברדוקציה של אין-סוף המקרים האפשריים למספר סופי של אפשרויות, ובדיקה באמצעות מחשב הביאה לפיתוח של אמת חדשה, המתבססת על תגבור יכולת החשיבה של האדם באמצעות מכונות והכניסה אם כך אמת אלגוריתמית אל תחום המתמטיקה. כך התפתחה מתמטיקה של ניסויים הנערכים במחשב ללא כוונת הוכחה, כך התגלו הפרקטלים והתפתחה תורת הכאוס. השיטה החדשה של אלגוריתמים הסתברותיים, למשל הטענה על מספרים שהם ראשוניים בהסתברות גבוהה תוך בדיקת עדים המקיימים $a^{p-1}\equiv 1\bmod(p)$. שיטות אלו הביאו למתמטיקה את האמת ההסתברותית.

מושג האמת במתמטיקה עבר עד היום שבע תמורות עיקריות:

1. **אמפירית**
2. **אינטואיטיבית**
3. **דדוקטיבית**
4. **אכסיומטית**
5. **רפלקטיבית**
6. **אלגוריתמית**
7. **הסתברותית**

כמו יצור חי שמורכב מכמה איברים שפועלים יחד, כך גם המתמטיקה הופכת לישות אורגנית, אם מתקיים קשר בין מגוון סוגי אמת אשר בה. אחדות המתמטיקה מושגת בראי אחדות האמת. מתמטיקה אורגנית נוצרת מהשילוב שבין רציונליות לתיאור השלם של מה שקורה באמת בעת היווצרותה. השפה המתמטית הרגילה היא בבחינת הטלה של הממשות לממד נמוך יותר של סמלים. יוצר המתמטיקה מתבונן שוב בממשות ורואה אותה שונה מכפי שהיא משתקפת בכתוב. התאמה הנוצרת בין השניים היא, אמת חדשה.

סימטרייה אחרת

נתונים שני מספרים אשר ערכם אינו ידוע לנו, אבל אנחנו יודעים את סכומם וגם את הפרשם. כדי למצוא ערך המספרים אנו יכולים לרשום שתי משוואות. אם למשל הסכום הוא 13 וההפרש 3 יכתבו המשוואות כך:

$$X+Y=13$$

$$X-Y=3$$

כשנחבר את שתי המשוואות נקבל $2x=16$, וכשנחסר אותן נקבל $2y=10$, מכאן נובע כי $x=8$ $y=5$. באופן כללי כשיש לנו שתי משוואות עם שני נעלמים, אנחנו יכולים למצוא את הפתרונות שלהן. מה נעשה אפוא אם נקבל דף נייר שעליו רשום:

$$6x+8z=9$$

למשוואה זו יש אין-סוף פתרונות אפשריים, ולא נוכל למצוא פתרון אחד. אבל אם בכל זאת אותו אדם שנתן לנו את הדף מתעקש שנמצא את הפתרון, יהיה הדבר תמוה בעינינו, אלא אם כן נבין שאפשר בעצם להפוך את הדף:

$$6=z8+9x$$

מאחר שגם כך אפשר לקרוא את זה כמשוואה נוספת על שני המשתנים, אפשר לפתור אותה ולגלות כי $Z=15/8$ $X=-1$. הצלחנו לפתור את המשוואה בגלל סימטריות של סמלים הכתובים על הנייר.
אמי נטר הייתה אחת המתמטיקאיות המפורסמות היחידות בתולדות המתמטיקה. אחד הגילויים החשובים שלה היה מציאת הקשר בין חוקי הטבע לעקרונות של סימטריה. חוק שימור האנרגיה נובע מתוך ההנחה שחוקי הטבע לא ישתנו עם הזמן, וחוק שימור התנע נובע מההנחה שחוקי הטבע אינם תלויים במקום. כך יוצא שמדענים היום מנסים להבין את חוקי הטבע באמצעות הבנות המגולמות בסימטריה.

למרות שבאוכלוסייה יש דווקא יותר נשים, איך נסביר את חוסר הסימטריה בין גברים לנשים בתחום המתמטיקה? דרך מקובלת להסביר זאת היא לדבר על נטיית הלב של נשים, ויש שמגיעים לשאלה האם קיים פער מסוים באינטליגנציה בין גברים לנשים. ייתכן שקיים הסבר נוסף שמקורו בהתבוננות וההבנה של התרבות האנושית. ערש התרבות כידוע הוא בגילוי החקלאות וההאפשרות לטמון זרע באדמה כדי שתצא ממנה חיטה. הטמנת זרע, כידוע, היא פעולה גברית. אפשר שמאז הגילוים הרבים במדע ואחר-כך גם במתמטיקה הסקרנות שלנו כלפי העולם אינה טהורה ונקייה, כי אנחנו לא רק רוצים רוצים ללמוד אותו, אלא גם רוצים לנצל אותו טוב יותר למעננו. היכן כדאי לטמון את הזרע כדי להבטיח את נביטתו? זוהי אנרגיה גברית השואפת להשפיע על הדברים ולעצב אותם מבחוץ.

אבל כיום ישנו קול קורא לאנרגיה הנשית למצוא את המקום הראוי לה. ביטוי מלא יותר של רגשות, של ההשפעה על דברים באמצעות קבלתם ברחם. יצירה של תנועת מחשבה לא תכליתית לוגית ולינארית כדי להגיע אל הוכחה. לא התוצאה חשובה אלא מה שקורה בדרך.

הזמן בשל לגלות שפה מתמטית חדשה המניחה מתוך עצמה שהמשמעות נמצאת לא רק בדף אלא גם במפגש דינמי בין האדם לכתוב. הסמלים אינם כתמים דוממים של דיו. אפשר, למשל, להפוך דף נייר ולגלות בדרך זו סימטרייה אחרת של חיים.

מלבני זהב

סדרה מתמטית היא קבוצת מספרים בעלת חוקיות פנימית. למשל, הסדרה 1,1,1,1,,, שהיא קבועה או הסדרה 1,2,3,4,... שההפרש בין כל שני איברים סמוכים הוא 1 , או 1,4,9,16,25,... שכל איבר בה הוא ריבוע של שלם עוקב. חידה נפוצה במתמטיקה היא : אם נתונה תחילת סדרה, מהו המשכה?

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,\ldots$$

סדרת פיבונצי נקראת על שם המתמטיקאי האיטלקי פיבונצי שגילה והגדיר אותה. בסדרה זו כל איבר החל מהאיבר השלישי הוא סכום של שני האיברים הקודמים. סדרה זו מופיעה במגוון רחב של תופעות בטבע, למשל מספר עלי הכותרת בפרחים ממשפחת המורכבים, מספרי הזרועות הספירליות בפרח החמנייה או באצטרובלים ועוד. אם מתבוננים ביחס שבין שני מספרים סמוכים בסדרת פיבונצי, מקבלים סדרה של מספרים: :

$$1\ ,\ 2,\ \ 1.5,\ \ 1.666,\ \ 1.6,\ \ 1.625,\ldots$$

סדרה זו שואפת למספר גבולי שהערך המספרי שלו הוא 1.61816...

מספר זה אינו יכול להיכתב בדרך זו בצורה מדויקת כי הוא אינו מנה של שני מספרים שלמים, אבל אפשר להראות באמצעות כתיבת משוואות מתמטיות שערכו המדויק הוא $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

מספר זה נקרא גם יחס הזהב, והוא מבטא יחס הרמוני בין שני גדלים .

אם נשרטט מלבן שהיחס בין גובהו לרוחבו הוא יחס הזהב, יתקבל מלבן שנחשב בעל יחס הרמוני. מלבן זה הוא בעל אסתטיקה רבה ומשמש לבניית מבנים בארכיטקטורה. כבר היוונים ידעו על קיומו של מלבן זהב והשתמשו בו כדי לבנות את האקרופוליס שבאתונה.

אחת התכונות המייחדות את מלבן הזהב היא שאם משמיטים ממנו ריבוע, מקבלים מלבן קטן יותר שאף הוא מלבן זהב. את התהליך הזה אפשר להמשיך גם במלבן הקטן שנוצר ולקבל בתוכו מלבן זהב קטן יותר, כך אפשר להמשיך בדמיוננו עד אין-סוף.

על-פי תכונה זו אפשר להראות כי יחס הזהב אינו מספר רציונלי. כלומר הוא אינו ניתן לכתיבה כמנה של שני מספרים שלמים. אילו היה יחס הזהב מספר רציונלי, אפשר היה לשרטט מלבן זהב מתאים שהצלעות שלו הן מספרים שלמים. אך מכל מלבן כזה נוצר הרי מלבן קטן יותר, אם משמיטים ממנו ריבוע, והמלבן הקטן שנוצר גם הוא מלבן זהב עם יחס הזהב בין צלעותיו. לו היה מלבן ראשוני שצלעותיו שלמות, היו גם צלעות המלבן הקטן שלמות, וכך היינו יכולים להמשיך עד אין- סוף, ומקבלים סדרה איו-סופית של מספרים שלמים שהולכים וקטנים. אבל מאחר שאי אפשר להמשיך כך עד אין-סוף, כי המספרים שלמים, יש סתירה בהנחת היסוד. זאת אומרת שההנחה שלנו שיש מלבן עם צלעות שלמות מוטעית, ולכן יחס הזהב אינו מספר רציונלי.

באמצעות התכונה של מלבן זהב שצוינה למעלה, אפשר להגדיר מלבן בעל תכונה דומה. אם נשמיט ממנו שני ריבועים בגודל הגובה, נקבל מלבן קטן יותר הדומה למלבן שיצאנו ממנו. מלבן כזה נקרא, מלבן כסף . היחס הנדרש שבין גובה לרוחב מתקבל כפתרון של משוואה ריבועית והוא:

כך ניתן להגדיר סדרה של מלבנים שכל אחד מהם מאופיין על-ידי התכונה, שאם משמיטים מספר מלבנים לאורך ואחר-כך לרוחב, מקבלים מלבן דומה למלבן הראשון. מהסדרה הראשונה של פיבונצי שהיא סדרה קווית קיבלנו סדרה מלבנית של מלבנים, שכל אחד מהיחסים שבין גובה לאורך בהם אף הוא אינו מספר רציונלי על-פי אותה ההוכחה.

המתמטיקה ויוצרה

באמצעות יצירה של דבר הנובע מעצמי, אפשר לגלות מחדש תשובה לשאלה "מי אני?". באמצעות הכתוב מונצח תהליך הגילוי וחושף את את ההד של המעשה בפני מישהו אחר. ניסיון להרחיב את אופן היצירה המתמטית מאפשר לתעד את רגע הגילוי עצמו. יצירה כזו מבטאת תהליכים היכולים ליצור איזון בין הרציונליות, החשיבה וטרנסדנטליות הגילוי.

כל התוצרים המתמטיים הרגילים: הגדרות, משפטים, הוכחות וכו' הם רק נקודות-קצה של אמת שלמה שעוטפת אותם. סמלים הנכתבים על הדף הם הטלה מממד גבוה של תנועה בזמן ובמרחב אל ממד סטטי. בדרך זו ניתן לשחזר תנועה שהתקיימה בעולם בעבר.

מה אמצעי התיווך והתנועה שבהם אפשרית היצירה המתמטית, ומה הן הסגולות של כל תיווך כזה? מחשבה עצמית, הלוח, הנייר, המחשב, השיחה - כל אחד מאמצעי תיווך אלה יש לו מאפיינים ייחודיים של תנועה. והמסגרת המאפיינת אותו קובעת גם את המהות ואת התחושה שיכולות לנבוע ממנו.

במחשבה העצמית בולט יסוד הארעיות, ההתבוננות החולפת מהר והתרה אחר אזורים, שבהם יכולה להתפתח השאלה. הלוח מאפשר להנציח ולו רק באופן ארעי את האזור החדש שבו מתגבשת השאלה. יסוד התנועה הרחב שביצירה אל מול הלוח מאפשר להתחבר לרלוונטיות של השאלה המתגבשת. הנייר הוא החממה שבה נובטת השאלה לתשובה, הוא מאפשר למקד בצורה מפורשת את השאלות הנדונות.

ולהצביע על הנבטים הראשונים שבפתרון. שדה הגידול של השאלה הוא במחשב שבו ליצירה שני פנים: תהליך פנימי של גילוי שבתוכו מגולמת כבר ההפניה המסודרת, הערוכה והגרפית החוצה אל האחר. לגבי השיחה, אעדיף לעשות זאת פנים אל פנים. סדר זה הוא רק אחת האפשרויות, אך יש בו התפתחות אורגנית.

מה המאפיינים הבולטים של היצירה המתמטית המקובלת שמעצבים את מהותה מעבר לתחום זה או אחר? רציונליות, אובייקטיביות, לוגיקה דואליסטית, אי-קבלה של הסתירה, חתירה לחד-משמעיות, ביטול האני היוצר כמרכיב ביצירה, יצירת הזיקה שבין אמת להוכחה. שימוש משולב של סמלים פורמליים טקסט ואיורים. האם ייתכן שהיצירה המתמטית של 3000 השנים האחרונות היא בבחינת וריאציות שונות הנובעות מבחירה אחת שנעשתה מתוך מגוון אין-סופי של סגנונות יצירה ותנועה מתמטיים אפשריים?

אם אכן כך, מה יקרה ליצירה המתמטית אם נחליט לוותר, או לשנות את אחד המאפיינים הללו, או אולי כמה מרכיבים יחד. האם המתמטיקה תאבד את משמעותה לחלוטין, או אולי תוכל לקבל משמעות חדשה תוך זיקה לעצם השינוי. את התשובה לשאלה זו יש צורך לחקור אבל גם ליצור.

לדעת מתמטיקה @.

נניח שקיים אדם היודע את כל המתמטיקה. הוא מכיר את כל הסמלים שלה, את התחומים השונים, את הבעיות והשאלות העיקריות שיצרו תחומים אלו, את המשפטים החשובים וגם את ההוכחות שלהם. לאדם זה יש תמונה ראשונית של המתמטיקה כולה, והוא מכיר דרכים שונות כיצד להגיע אל מה שהוא עדיין לא יודע.

כשאותו אדם נכנס, למשל, אל הספרייה במתמטיקה שבה עשרות אלפי הספרים, הוא מתהלך ביניהם ומתבונן בחלק מהם. הוא פותח אחדים מהם, מעיין בהם ורואה סמלים, איורים ומשפטים שמהדהדים בעצמו. הוא מתיישב ליד אחד השולחנות ומוציא עט ונייר, מתבונן בדף הלבן שמולו, עוצר את מחשבתו, וכותב סימן מתמטי ראשון על הנייר.

@

כאשר @ כותב סמל או ביטוי מתמטי כלשהו, הוא מצליח לראות מעין הילה של משמעות סביב אותו סמל. זהו הדהוד הסמל בתודעה שלו היודעת מתמטיקה, מעין זיכרון עמום של כל מה שמתקשר במתמטיקה אל אותו ביטוי, האופן אשר בו @ מעניק חיים לצופן הסמלים המתמטיים. התודעה שלו עוטפת את הכתוב בקרום דק של חיים. @ בורא על דף הנייר צורות חיים שעשויות לקיים בינן לבין עצמן קשרים פנימיים ותנועה המתרחשת לא רק על הנייר הכתוב, אלא גם בתודעה שלו עצמו.

כתיבה על הדף ממלאת את הנייר בחיים שוקקים. לפתע חיים אלו עשויים להזכיר לכותב את עצמו ואת מה שהוא עושה באותו רגע. הוא יכול לראות בכתוב מעין מראה של עצמו בתהליך, התחלה של חיים מסדר שני. הכתיבה הפכה למראה של עצמה. הכתוב בדף מצביע בעצם על מי שכותב את הדף.

אם נתייחס לכתוב בדף כאל פונקציה מתמטית הפועלת על תודעת הקורא, הרי אותו רגע של חיים מהדהדים הוא כמו נקודת שבת או ערך עצמי של פונקציה זו. כלומר התבוננות של @ שהוא יודע מתמטיקה בכתוב בנייר, יוצרת בתוך עצמו חזרה של היותו. הוא מתבונן בעולם ואומר לעצמו משהו מעין זה: הנה אני כאן מתבונן בעולם שמסביב, והוא מתבונן בי בחזרה.

@ הוא תא החיים הבסיסי של המתמטיקה, הביטוי האורגני השלם שלה. במתמטיקה מעין זו, אין צורך להוכיח דבר, כי נכונות הדבר היא פשוט בעצם ההתגלות לעיננו. הדגש אינו על פורמליות צרופה, אלא על שימוש אחר בשפה הרגילה. הגוף הפיסי נשען אמנם על המתמטיקה הרגילה, אבל הרוח החיה היא במילים הכתובות. אין חתירה בהכרח לחד-משמעיות כי גם ההפך משיג את האפשרות של היווכחות הקורא בכתוב, לדעת מתמטיקה @.

אין זמן

באמצעות סרגל ומחוגה אפשר לחלק כל קטע נתון לשני חלקים שווים. באותם אמצעים אפשר גם לחלק כל זווית נתונה לשניים, לשרטט ריבוע עם אורך צלע נתון ולמצוא את נקודת החיתוך שבין שני מעגלים וכן בניות רבות אחרות.

אבל שלוש שאלות של בנייה באמצעות סרגל ומחוגה העסיקו מתמטיקאים יותר מאלפיים שנה. האם אפשר לחלק זווית נתונה לשלושה חלקים שווים? האם בהינתן רדיוס של מעגל ניתן לבנות ריבוע בעל שטח שווה? והאם בהינתן צלע של קובייה ניתן לבנות צלע של קובייה בעלת נפח כפול?

בשנת 1822 סלל המתמטיקאי הצרפתי גלואה את הדרך להראות שלא ניתן לבצע את הבניות הללו באמצעות סרגל ומחוגה. הרעיון הבסיסי נעוץ בכך שאת סדרת הקואורדינטות של הנקודות המתקבלות בבנייה באמצעות סרגל ומחוגה, מקבלים באמצעות פתרונות של משוואות ריבועיות או משוואות קוויות. אך כשנרצה לחלק זווית לשלשה חלקים שווים, למשל לחלק זווית של 60 מעלות לשלוש זוויות בנות 20 מעלות כל אחת, אנחנו צריכים להיות מסוגלים לפתור משוואה ממעלה שלישית. באופן זהה לא ניתן גם להכפיל נפח של קובייה, כי זה אומר שנצליח לפתור משוואה ממעלה שלישית $x^3 - 2 = 0$ וזה דורש פתרון משוואה ממעלה שלישית בלתי פריקה. באותו אופן לא ניתן לרבע את שטח המעגל כי זה אומר למצוא משוואה ש π הוא פתרון שלה אבל ידוע ש π לא פותר שום משוואת פולינום עם מקדמים שלמים.

גלואה היה גאון מתמטי,שהסביבה הקרובה לא הכירה בכישוריו ולכן הוא לא התקבל ללימודים גבוהים. הוא פנה מתוסכל לפוליטיקה, ויום אחד הסתבך בדו-קרב מילולי עם אציל על כבודה של אישה. האציל הזמין את גלואה לדו-קרב. בערב שלפני כן התיישב גלואה וכתב את מה שכונה אחר-כך בשם הצוואה המתמטית שלו.

"אין זמן ,אין זמן" כך כתב גלואה בן ה- 23 ב 30 העמודים הצפופים. גלואה ידע כי זהו יומו האחרון, על כן רצה לסכם את כל ההבנות המתמטיות שהגיע אליהן. הוא ביקש מחבריו לשלוח את כתב היד אל אחד מגדולי המתמטיקאים בדורו, אך כתב-היד אבד ונתגלה מחדש רק כעבור 40 שנה. בעקבות מה שהובן מהכתוב התפתחה תורת החבורות ומה שמכונה היום במתמטיקה "תורת גלואה". אך רוב מה שנכתב שם סתום עדיין בימינו.

אחד הפרדוקסים שיש כיום במדע קשור בתפיסת הזמן. על-פי המשוואות בפיסיקה, ניתן להפוך את סדר המאורעות בזמן, אך המציאות על- פי עיקרון גידול האנטרופיה אינה הפיכה בזמן. הסרטת סרט המציאות הפוך בזמן תראה תופעות אבסורדיות, למשל, שברי כוס המתחברים לכוס שלמה וכו'. פתרון הפרדוקס דורש מאתנו אולי ראייה אחרת של מושג הזמן. המדע הרגיל מנסה להקפיא את הזמן, הדיו המתייבשת של הכתוב מבטאת זאת. ספרי המתמטיקה והפיסיקה הרגילים בניסיונם לתאר את העולם מנקודת מבט הגיונית בלבד, הופכים את כיוון הזמן, כי הסידור הלוגי הוא הרי הפוך למה שמתרחש באמת בשעה שיוצרים מתמטיקה.

ייתכן פירוש נוסף למשפט שמופיע בצוואתו "אין לי זמן". אפשר שגלואה חווה אזי באותו ערב את מושג הזמן בדרך אחרת מהרגיל. בשעות האחרונות של חייו פגש גלואה באפשרות לראות את החיים ללא מושג זמן. קיים רק הווה, וזמן הוא רק צורה של ארגון ההווה של התופעות. אפשר להתבונן על כל היקום גם בדרך אחרת. כמו שצופים בכוכבים בלילה, שכל אחד מהם אורו מזמן אחר כך נוצרת התבוננות מממד של "אין זמן".

השלם וחלקיו

שני תרגילי החשבון 4=2+2 2+2=4 נראים זהים במבט ראשון. אבל מבט שני מגלה שלמרות זאת קיים הבדל מסוים. התרגיל הראשון 2+2=4 אומר שאם נחבר 2 ל- 2 נקבל את התוצאה 4. התרגיל השני 4=2+2 אומר: 4 הוא תוצאה של חיבור 2 עם 2. נוסף לכך, 4 יכול להתקבל גם כסכום של 3 ו- 1 כלומר 4=1+3 או 4=1+1+2 וגם 4=1+1+1+1 . יש ארבעה דרכים שונות להציג את 4 כסכום של מספרים. כל מספר טבעי יכול להיות מוצג בכמה דרכים כסכום של מספרים טבעיים. פונקציית החלוקה למספר היא בדיוק מספר הדרכים השונות שניתן להציגו.

Pr(2)=1 2=1+1

pr(3)=2 3=1+1+1=1+2

pr(4)=4 4=1+1+1+1=2+2=2+1+1=3+1

pr(5)=6 5=1+1+1+1+1=2+1+1+1=3+1+1=3+2=2+2+1=4+1

המתמטיקאי סרינוואסה רמנוג׳ן הגיע לתוצאות מעניינות לגבי תכונות של פונקציית החלוקה. הוא גם נחשב לאחת התופעות המוזרות בתולדות המתמטיקה. הוא נולד בשנת 1887 בעיירה ארודה שבהודו, ליד מדרס. כבר בילדותו התגלה כשרונו המדהים במתמטיקה לחשב חישובים ולגלות זהויות מתמטיות בכוחות עצמו. כשהיה ילד נפגש במקרה עם ספר מתמטיקה, שהיה חשיפתו היחידה של רמנוג׳ן למתמטיקה המערבית. הוא הטיל על עצמו להוכיח את כל הנוסחאות שמצא בו, כשכל פתרון היה עבודת מחקר מקורית. כמבוגר מצא רמנוג׳ן עבודה כפקיד זוטר ברשות הנמלים במדרס. הזמן הפנוי שנותר לו אפשר לו להמשיך במחקרים ובגילויים המתמטיים באופן עצמאי.

בשלהי 1912 שלח רמנוג׳ן את גילוייו המתמטיים אל המתמטיקאי האנגלי הרדי. בתחילה השליח הרדי את המכתבים, כי חשב שמדובר בגניבה ספרותית. אך בעקבות שיחה שהייתה לו עם המתמטיקאי ליטלווד, הבין הרדי שמדובר בעצם ביצירה של גאון. הוא הזמין את רמנוג׳ן להיות במחיצתו בקיימברידג׳ שבאנגליה. עבור רמנוג׳ן החלה תקופה של פריחה משגשגת של שלוש שנים. רמנוג׳ן השאיר אחריו ארבע מחברות הכוללות 4,000 נוסחאות מתמטיות מוזרות הכתובות בכתב-יד צפוף. מחקריו משמשים היום אבן-יסוד חשובה בבנייה של תורת המיתרים, המדמה את התופעות כרטיטות. בעולם בעל 26=2+24 ממדים, ומנסה לפצח את חידת היקום.

אבל החידה המתמטית הגדולה שהשאיר רמנוג׳ן היא, הוא עצמו. הדרך המיוחדת שבה הגיע לגילוייו המתמטיים. הוא היה מגלה מספר נוסחאות מדי יום, אבל לא הוכיח אותן מעולם. הוא היה רושם אותן כשהן הופיעו אצלו בתודעה. כשנשאל על-ידי עמיתים כיצד הוא מגלה את הנוסחאות הללו הייתה תשובתו, שהאלה נמקל מעניקה לו את ההשראה בחלומותיו. רמנוג׳ן היה אולי עדות לקיומה של הוויה מתמטית מסוג אחר, מתמטיקה של ראייה ישירה, יצירה מתמטית וגילויים נכונים המופיעים ללא הסבר והוכחה.

הפתרון של חידת רמנוג׳ן היא ההבנה כיצד אפשרית תופעה זו, הבנה של ההבנה את עצמה. פתרון החידה יביא לפתרון שאלת אחדות המתמטיקה, רא׳ית השלם לפני ראיית החלקים- כמו שרואים קודם מספר שלם ורק אחר כך את הדרכים השונות שניתן להרכיב אותו בחזרה כסכום של מספרים. המתמטיקה כאחדות אינה הצירוף של חלקיה, אלא היא שלמות אורגנית אחת שאותה ניתן לפרק בדרכים שונות למרכיבים שונים לתחומים, להגדרות למשפטים ולנוסחאות. כך אפשר לקרוא את הדף פעמיים. פעם כשהוא עדיין אינו מובן כמו 1+1=2 , ואחר-כך כשכבר מבינים אותו 2=1+1 , ואז המילים מתפרשות מחדש באור ההבנה השלמה.

רואים מתמטיקה

קיים יחס קבוע בין היקף מעגל לקוטרו. יחס זה מכונה π וערכו המקורב הוא 3 . אבל מדידה מדויקת יותר מראה כי ערכו קרוב יותר ל- 3.14 .
בכל מקרה, מסתבר שלא ניתן לכתוב אותו בצורה מדויקת באמצעות מספר סופי של ספרות. לכן נדרשות שיטות של קירובים כדי לחשב אותו. המתמטיקאי ארכימדס מצא שיטה של קירובים המתבססת על חישוב של היקפי מצולעים משוכללים בתוך מעגל . ככל שמספר הצלעות גדול יותר, כך המצולע מתקרב להיות מעגל, ואז היחס שבין היקף המצולע לקוטרו שואף ליחס של π. כך חישב ארכימדס את ערכו של π בדיוק חמש ספרות.

על אופן התפתחות התודעה המתמטית אפשר ללמוד באמצעות התבוננות בשיטות שונות שהתפתחו במהלך ההיסטוריה לחשב את π בדיוק הולך וגדל. ארכימדס, כאמור, מצא דרך לחשב את π באמצעות סדרה אין-סופית של מצולעים החסומים זה בתוך זה במעגל וחישוב היחס בין היקפם לבין קוטר המעגל. ליבניץ מצא שיטה המסתמכת על הנוסחה

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

המתמטיקאי נפיר מצא דרך סטטיסטית המסתמכת על הטלת גפרורים רבים בין שורות מקבילות שהמרחק ביניהן כאורך הגפרור ועל חישוב היחס בין הגפרורים החותכים את הקו לבין המספר הכולל של הגפרורים שהטלנו השואף ליחס שבין 2 לפאי.

באמצעות מחשבים הוגדרו תהליכי חישוב מורכבים, אשר הביאו לכתיבת π בדיוק של מיליוני ספרות, אבל המשותף לכל השיטות הללו הוא שאם ידוע מספר ספרות של π, אז לצורך חישוב הספרה הבאה עלינו להסתמך על הספרות הקודמות של π הידועות כבר.

לפני מספר שנים נמצאה דרך חדשה לחשב את π. המתבססת על ייצוג המספרים לא באמצעות עשר ספרות, כפי שמקובל בבסיס 10 , אלא על בסיס ספירה שיש בה 16 ספרות. תוך שימוש בשיטות מתמטיות ובנוסחאות שגילה רמנוג'ן, התגלתה נוסחה לחישוב הספרה ה- N של π בבסיס 16 שאינה תלויה בספרות הקודמות של π.

אנחנו יכולים לחשב מהי הספרה המיליונית של π בבסיס 16 בלי לדעת מה הספרות הקודמות לה. ההבדל בין שיטה זו לשיטות הקודמות דומה להבדל בין האזנה למוסיקה מקלטת לבין האזנה לה מדיסק. בקלטת צריך לעבור על כל השירים עד שמגיעים לשיר שבו מעונינים, ובדיסק אפשר להגיע אליו ישירות.

אם נמצאה הדרך לראות את כל הספרות של π באופן ישיר. עולה השאלה אם קיימת דרך להבין את הממשות שלא בדרך של קירובים ההולכים ומשתכללים, אלא בדרך של ראייה ישירה. לא בדרך של הוכחה, אלא בדרך של היווכחות. אפשר, למשל, לחשוב שאם נייצג את המספרים לא בבסיס 10, אולי נגלה פירוש נוסף לתופעות המתגלות לנו עם מספרים. הרי בסיס 10 הוא שרירותי ומסתמך אך ורק על כך שלאדם עשר אצבעות.

אבל ייתכן דווקא ההפך, כי אם נמצא דרך לייצג את היצירה המתמטית, ולא רק את בסיס הספירה העשרוני בדרך אחרת, נגלה אותה דרך להבנת המתמטיקה כולה ולראייתה באופן ישיר. כך ייסגר מעגל של האדם היוצר את המתמטיקה, ונבין את אותו יחס הקבוע והדינמי בין האדם ליצירה המתמטית.

שדה המתמטיקה

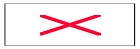
כשלפנינו שתי קבוצות תפוחים שבאחת מהן שלשה תפוחים ובשנייה ארבעה, נוכל להבחין בנקל היכן יש יותר. אך אם לפנינו שתי קבוצות שבאחת מהן 100 תפוחים ובשנייה 99 , לא נוכל לדעת זאת, אלא אם כן ניצור התאמה בין תפוח לתפוח ונגלה כי באחת הערמות תפוח אחד יותר. המספרים הטבעיים 1,2,3,4,5,6,... הם שמות שניתנו לקבוצות בעלות אותו מספר איברים. קבוצה שבה ארבעה מטבעות וקבוצה שבה ארבע קוביות , מאחד אותן השם או המספר 4 . קוביות מאחד אותם השם או המספר 4 . כך אפשר, למשל להכריע בשאלה על איזה עץ מבין שניים יש יותר תפוחים בלי לקטוף את התפוחים.

קיום המספרים הטבעיים העלה צורך לפתור משוואות שלא היה להן פתרון במסגרת המספרים הטבעיים. משוואות מהדגם $x+3=2$ הולידו את המספרים השליליים (...,-1,-2,-3,-4) שיחד עם הטבעיים יוצרים את המספרים השלמים. כאמור, המספרים גדלו וצמחו באמצעות השאיפה לפתור משוואות מתמטיות. כך הורחבו המספרים הטבעיים מ 0 ועד אין-סוף עד לאין-סוף.

בהמשך הופיעו משוואות מתמטיות, שלא הייתה אפשרות לפתור אותן באמצעות מספרים שלמים בלבד. משוואות מהדגם $2x=3$ הולידו מספרים רציונליים (3/2 4/5 7/2 ....), שהם יחסים בין שני מספרים שלמים. אבל מתברר שלא כל המספרים הם רציונליים, למשל אורך היתר במשולש ישר-זווית שאורך כל צלע בו הוא 1 .

מדובר במשוואות חדשות שלא ניתן לפתור אותן באמצעות מספרים רציונליים :

פתרונות של משוואות כאלה מכונים מספרים אלגבריים. אך מתברר שלא כל המספרים הם פתרונות של משוואות כאלה. שאר המספרים הנמצאים על הקו הישר האין-סופי מכונים מספרים טראנסדנטליים, וכל המספרים אשר נמצאים על קו ישר נקראים מספרים ממשיים.



למשוואה זו הכתובה עבור מספרים ממשיים, אין פתרון, כי כל מספר כפול עצמו הוא מספר חיובי. לכן שדה המספרים עבר אבולוציה נוספת עם המצאת המספרים הדמיוניים, ובמקרה הזה הפתרון הוא i שהוא השורש הדמיוני של 1- . מספרים מרוכבים הם מספרים הנוצרים מחיבור מספרים ממשיים עם מספרים דמיוניים, למשל המספר 2+5i.

המתמטיקאי גאוס גילה כי לכל משוואה בפולינומים שכתובה במספרים מרוכבים יש פתרון שהוא מספר מרוכב. יוצא אם כך שאת שדה המרוכבים לא ניתן להרחיב באמצעות משוואה.

- **טבעיים**
- **שלמים**
- **רציונלים**
- **ממשיים**
- **מרוכבים**

זוהי ההתפתחות והאבולוציה אשר עברו המספרים הטבעיים. כל שלב נוצר באמצעות התמודדות עם בעיה חדשה ומשוואה שאי-אפשר היה לפתור אותה באמצעים הקודמים. בתחום המספרים הגענו אל סוף הדרך. ביחס למתמטיקה קיימת שאלה מה אפשר ללמוד מהתפתחות זו של המספרים לגבי כלל המתמטיקה, והאם ניתן באנלוגיה למצוא שדה שלם גם של המתמטיקה כולה.

קיום ובניה

קיימת דרך להבחין בין מספרים רציונליים למספרים אי-רציונלים באמצעות ייצוגם בבסיס 10. לדוגמה המספרים ½=0.5 או ¼=0.25 . המספר הרציונלי 1/3 ניתן אף הוא לכתיבה בייצוג 10 , אלא שהפעם נידרש לסדרה אינסופית של ספרות כדי לתאר אותו 1/3=0.333333... הוא הדין לגבי המספר 1/7=0.14285714285... . אפשר להראות כי כל מספר רציונלי- סידרת הספרות שמייצגות אותו בבסיס 10 חייבת להיות סדרה מחזורית, כלומר תבנית קבועה שחוזרת על עצמה אין-סוף פעמים. לעומת זאת המספרים האי- רציונלים הם מספרים שייצוגם בבסיס 10 אינו מחזורי. זוהי , כאמור, הבחנה נוספת בין רציונליים לאי-רציונליים.

נניח שיש לנו פאון תלת ממדי משוכלל בעל 10 פאות. נניח גם שעל כל אחת מהפאות רשום אחד מהמספרים 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 . כעת אנחנו זורקים את הפאון ומקבלים את אחד המספרים, למשל את המספר 5 . אחר-כך אנחנו זורקים את הפאון שוב ומקבלים מספר חדש למשל 4 . וכך פעם אחר פעם אנחנו זורקים את הפאון ומתקבלת סדרת ספרות עשרוניות.

בדרך זו אנחנו בוחרים מספר ממשי בין 0 ל- 1. במקרה שלנו המספר 0.54... וכו׳ בהתאם לספרות המתקבלות. נניח אם כך תהליך דמיוני שבו נזרק הפאון אין-סוף פעמים. מאחר שהזריקה היא אקראית, אין כל סיכוי שנקבל לאורך זמן סדרה מחזורית של ספרות. ייתכן אמנם שנקבל סדרה מחזורית באורך גדול מאוד למשל 0.123123123... אבל בסופו של דבר בגלל האקראיות חייב משהו להשתבש בדרך, מה שיפר את המחזוריות. לכן נוכל לומר בוודאות שבבחירה אקראית של ספרות המספרים, לעולם לא נקבל מספר רציונלי, אלא דווקא מספר אי-רציונלי.

במספר x שיתקבל בסוף התהליך, כל אחת מעשר הספרות תופיע בשכיחות זהה של 1/10 . כמו- כן כל צמד ספרות, למשל 23 , יופיע בשכיחות זהה של 1/100 , ובכלל כל רצף באורך של N ספרות יופיע בשכיחות שווה של 1/10 בחזקת N .

מספר ממשי נקרא נורמלי, אם שכיחות ספרותיו היא כאילו הייתה מתקבלת בתהליך אקראי לחלוטין של בחירת הספרות. ניתן להראות שאם בוחרים בדרך אקראית של הספרות מספר כלשהו, אז בסיכוי 1 הוא יהיה מספר נורמלי. זאת אומרת שבמובן מסוים כמעט כל המספרים הממשיים הם נורמליים. מפתיע אם כך לדעת שלמרות שרוב המספרים הם מספרים נורמליים, עד היום לא מצאו אפילו מספר אחד נורמלי שהצליחו להוכיח לגביו שהוא כזה .

ייתכן כי הסיבה לכך היא שכל מספר שאתה יכול להגיד עליו משהו שיטתי ומאורגן , כך שאתה יכול להוכיח לגביו איזו תכונה, למשל שהוא נורמלי- זה כבר משהו שמפר את האקראיות שלו, ולכן סותר את היותו נורמלי.

אבל ייתכן גם שלעולם לא נוכל להצביע באמת על מספר נורמלי. כי כל מספר שנצביע עליו קשור באיזשהו אופן בתהליך אנושי שיטתי, המתבצע גם אם הוא אין- סופי. והוא מוגדר באמצעות איזו רקורסיה. לכן מהעובדה שעד היום טרם הצלחנו להצביע על מספר אחד נורמלי, ניתן להסיק שבאמת כל המספרים שאנחנו יכולים להגיד עליהם משהו מתמטי הנם בהכרח לא נורמליים במובן של חוסר אקראיות הקיימת בהם.

מכך נסיק גם על היצירה המתמטית הרגילה שמשהו קיים בה באמת אם אפשר להצביע על דרך מסוימת לבנות אותו.

פעולה אחרת

פעולות החשבון חיבור וכפל מקיימות תמיד שלשה חוקים:

1. **חוק החילוף:** **3+2=2+3** **4*5=5*4**
2. **חוק הקיבוץ:** **3*(2*5)=(3*2)*5** **3+(4+2)=(3+4)+2**
3. **חוק הפילוג:** **4*(3+2)=4*3+4*2**

האם קיימת פעולת חשבון שלישית לא מוכרת המתאימה מספר שלישי לשני מספרים. ומקיימת את שלשת החוקים הנ"ל. אם נסמל את הפעולה החדשה הזאת נסמן ב @. אז צריך להתקיים:

חילוף **x@y=y@x**

קיבוץ **x@(y@z)=(x@y)@z**

פילוג ביחס לכפל **x@(y*z)=(x@y)*(x@z)**

לאחר שהתגלתה הפעולה הזו שאלתי את עצמי, האם הפעולה התקיימה לפני שהיא התגלתה. אולי אפשר גם למצוא לה שימושים מעשיים. אך מה שחשוב יותר זוהי חוויית הגילוי. המפגש עם המתמטיקה בהתהוותה מאפשר לנו להרגיש בה בני בית, ולא רק אורחים.

בעקבות גילוי פעולת חשבון העוקבת לפעולת החיבור והכפל שאלתי האם קיימת סדרה אין-סופית של פעולות חשבון בין מספרים, שהן כולן חילופיות וכל אחת מהפעולות מקיימת את חוק הפילוג ביחס לקודמתה.

גם כאן התגלתה תשובה חיובית: עבור N=0 מתקבלת פעולת החיבור X+Y עבור N=1 מתקבלת פעולת הכפל, ועבור N=2 מתקבלת הפעולה @ הקודמת. ככל ש N גדל, נראה משהו שצומח מתוך עצמו. כמו שזרע ונבט הם אב- טיפוס של העץ כולו כך גם הפעולות הבסיסיות, חיבור וכפל, הן אב טיפוס של כל הפעולות עצמן - התפתחות אורגנית לפעולות החשבון.

$$X[n]Y=E^{E^{E^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{E^{\ln(\ln\ldots(\ln(x)+\ln(\ln\ldots\ln(y)}}}}}}}$$

האם קיימת סדרה אין-סופית של סוגי מתמטיקה שבה איבר הראשון מייצג את המתמטיקה הרגילה, ואיברים אחרים בסדרה הם איכויות חדשות של מתמטיקה, הנוצרות מהתבוננות חוזרת ונשנית של המתמטיקה על עצמה ?

אל כל צליל שאנחנו מנגנים ומשמיעים מתלווים ברקע גם צלילים עיליים נסתרים, שהחושים הרגילים שלנו אינם יכולים לשמוע אותם אלא רק לאחר אימון רב. ייתכן אם כך שקיימת שפה מתמטית אחרת. צריך אימון רב כדי להיות מסוגלים להבין ולחוש את קיומה. אם כך, יתברר שהגילוי שתואר קודם על סדרה אין-סופית של פעולות חשבון הוא תחילת ראית המתמטיקה כפועלת על עצמה.

ההסתברות לסטטיסטיקה

יושב מול מעבד התמלילים ורואה שיש בו אפשרות לספור מידי פעם כמה מילים נכתבו עד כה בעמוד וכמה אותיות. עד עכשיו, למשל, נכתבו 25 מילים ובהן 116 אותיות. זה אומר שממוצע התווים במילה עד כה היה 116/25=4.64 . אבל אם מבצעים את הפעולה שוב ברגע הזה, מתקבלות 48 מילים ו 208 מילים כלומר ממוצע של 4.33. זוהי ירידה משמעותית ניתן אולי להבינה עקב בגלל השימוש במילים קצרות במשפט הקודם. עכשיו מובן שאם אני ארצה לערוך שינויים כלשהם במסמך, יש עלי לשנות את כל המספרים המחושבים. גם שינוי של מילה אחת משפיע על מכלול הדברים. ואפילו הוספת או גריעה של אות משנות את החישוב. ייתכן אפילו שעריכת המסמך מחייבת לא רק שינוי המספרים, אלא אף את המסקנות המתבקשות מהמספרים. בשלב של תובנה שכזו אני בודק מחדש את סטטיסטיקת המילים כדי לגלות שהממוצע כעת ברגע זה ,עומד על 4.41.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

אחת השאלות שאני שואל את עצמי היא האם סדרת הממוצעים המתקבלת היא סדרה סתמית של מספרים או שהיא מתכנסת לאיזה ערך בעל משמעות פנימית הרלוונטית לגביי. זוהי, בעצם, גם שאלה על הערך האמיתי של סטטיסטיקה. האם המתודה הסטטיסטית אכן מגלה איזו משמעות של דברים, או שמא לכל סדרה של מספרים יש בהכרח איזה ממוצע. בהקשר זה בודאי מוכרת האנקדוטה על אותו אדם שטבע בבריכה , שהגובה הממוצע שלה היה 42.2 ס״מ.

פתחתי עכשיו קובץ אחר בדקתי יחסים, וגיליתי שם שהממוצע של היחס בין תווים למילים הוא 4.66 . בשלב זה של הכתיבה לא ברור בשלב זה של הכתיבה האם יש בכלל ערך אופייני או שזה תלוי באיזה אופן בנושא הנבחר, אשר גוזר מגוון מסוים של מילים בעל ערך ממוצע אופייני. בכל אופן, העובדה שהממוצע ברגע זה, כעת עומד על 4.32 מעידה על האפשרות, שבמסמך זה הממוצע יתכנס בסביבות 4.3, אלא אם כן יתרחש משהו אחר. אבל הבעיה העיקרית של הסטטיסטיקה היא שגם אם מתקבלים ערכים אופייניים לממוצעים ולקשרים שבין המשתנים, לא מתקבלת הבנה עמוקה לגבי המשמעות הפנימית שלהם.

האם תיתכן סטטיסטיקה אחרת החותרת להבנה איכותית של המשתנים הרלוונטיים. מתודה כזו תצטרך להגדיר משתני-על שאינם נובעים מצירוף מספרי של המשתנים הקיימים, כאילו המשתנה המסביר הוא מממד גבוה יותר, משהו שמתבונן מלמעלה על הדברים. בשלב זה של הכתיבה הממוצע המתקבל, הוא 4.48 מה שמעיד על איזה שינוי במגמה הכללית כלפי מעלה.

דומה שהפעולה האמיתית של המוח האנושי היא כזו: המוח יוצר הבנות איכותיות כמו מילים כתוצאה מתהליכים סטטיסטיים, אשר מתרחשים ברמה המיקרוסקופית. המוח מתרגם באמצעות סטטיסטיקה בין ההתרחשויות בין התרחשויות מיקרוסקופיות בתוכו לבין תופעות המקרוסקופיות הנקלטות באמצעות החושים. ופעולתו נעשית , באמצעות סטטיסטיקה שונה מהמקובל.

4.65 תווים למילה עד כה. כל שינוי ועריכת הטקסט משנים את הערכים. בתנאים מסוימים יתקבלו מצבי יציבות כנקודות תהודה. מיצ׳ל פינגנבאום, שהוא מהחוקרים הבולטים של תורת הכאוס חקר גם את האפשרויות האלה, וביצע חישובים ביחסים של תהליכים כאוטיים. הוא גילה תגלית שבמגוון מסוים של תופעות כאוטיות מתקיים יחס קבוע בין נקודות ההתפצלות שונים. אלו הן נקודות איכותיות אשר נובעות מתהליכים רציפים. את אותו הקבוע שגילה מכנים בשם קבוע פינגנבאום, וערכו הוא 4.669 , היחס בין מספר התווים למספר המילים עד כאן.

עמודי גדל

אנו פוגשים אדם שמצהיר "אני שקרן". האם אדם זה דובר אמת או משקר? אם שקרן הוא, אז המשפט שאמר לנו הוא דווקא נכון, ולכן אינו שקרן. אם הוא דובר אמת, מדוע העיד על עצמו שהוא שקרן? יש כאן בעיה המכונה במתמטיקה "פרדוקס השקרן". תוך שימוש ברעיון זה בנה גדל את אחד המשפטים המתמטיים החשובים ביותר. הוא בנה משפט בתורת המספרים, שמצד אחד טוען טענה על מספרים, פירושו בעין המתבונן בו שאין לו הוכחה. באופן הזה הראה גדל שיש טענות שהן בלתי תלויות באכסיומות של תורת המספרים. מכאן הוא הוכיח את חוסר השלמות שבמתמטיקה.

נתבונן כעת בעמוד שרשומים בו ששת המשפטים הבאים:

המשפט הבא נכון. יש בעמוד הזה שלושה משפטים נכונים. המשפט הראשון אינו נכון. כל המשפטים בעמוד נכונים. המשפט השני נכון כמו השלישי. המשפט השלישי נכון.

כל אחד מששת המשפטים יכול להיות נכון או לא נכון, ולכן יש 64 (2 בחזקת 6) מצבי אמת שונים לעמוד הנ"ל. אך לרוב הצבה של ערכי אמת למשפטים תוליד איזו סתירה, ועולה השאלה אם יש איזה ערך אמת למשפטים שעולה בקנה אחד עם מה שכתוב בהם. את הרעיון הזה ניתן להכליל לעמוד, שיש בו מספר אחר של משפטים הטוענים על נכונות או אי-נכונות של המשפטים בעמוד. עמוד גדל מסדר n הוא עמוד שיש בו n משפטים שונים, שכל אחד מהם טוען משהו על נכונות המשפטים בעמוד. n משפטים יכולים להיות ב 2^n מצבי אמת שונים, ולכן יש 2^{2^n} משפטים שונים אפשריים ובסה"כ 2^{n2^n} עמודי גדל שונים, מסדר n. למשל, עבור n=2 יש 256 עמודים שונים, ובהנחה שביקום יש 10^{80} חלקיקי יסוד שונים, אזי מספר עמודי גדל מסדר העמוד למעלה גדול ממספר החלקיקים שבכל היקום. מודל לעמוד גדל הוא התאמה של ערכי אמת או שקר לכל אחד מהמשפטים בעמוד. הצבה היוצרת התאמה עם הערכים המחושבים של ערכי המשפטים. באופן עקרוני ייתכנו 2^n מודלים שונים לעמוד גדל מסדר n. אבל ברור שלרוב רק אחדים, ואולי בכלל לא, הם באמת מודלים אפשריים. אם נסמן את המשפטים בעמוד ב :

אזי באמצעות השימוש באלגברה בוליאנית ניתן למצוא n פולינומים ב- n משתנים בוליאניים כך ש :

כאשר יש מודל אז :

אם כך תנאי הכרחי ומספיק שיהיה מודל לעמוד גדל הוא שיתקיים:
תנאי זה ניתן לבדיקה באמצעות מספר יחסית מצומצם של פעולות, אבל עולות מספר שאלות על עמודי גדל:

- כיצד ניתן למצוא מודל בפועל?
- מהו הסיכוי שלעמוד גדל מסדר n יהיה מודל?
- מהי התוחלת של מספר המודלים של עמוד גדל מסדר n?
- האם ניתן ליצור משפט דומה למשפט גדל המסתמך על עמודי גדל?

סב המדע

חפצים כבדים ייפלו מהר יותר מחפצים קלים, כך לפחות חושבים רוב בני-האדם בתחושה אינטואיטיבית, אם הם נשאלים בעניין. כך אפשר היה להבין מאריסטו, כשתורתו מתארת את נטייתם הטבעית של עצמים לחזור אל מקורם הראשוני. בלשון פיוטית אמר אריסטו שאבן כבדה מתגעגעת יותר מהקלה לחזור אל מקורה, האדמה. אך אריסטו, ככל הנראה, לא ניסה את הדבר מעולם. התאוריה שלו התבססה על תחושה ***סובייקטיבית,*** תורה שאף אחד לא ניסה לערער עליה במשך קרוב ל - 2,000 שנה.

לפני כ- 400 שנים , כך מספרת האגדה , החליט גלילאו לטפס על גג מגדל פיזה שבאיטליה. בכיסו היו מונחות שתי אבנים, אחת קלה והאחרת כבדה יותר: כשהגיע למעלה שחרר בו-זמנית את שתיהן, כדי לראות איזו מהן, אם בכלל, תגיע קודם אל האדמה. ניסוי מפורסם זה במדע היה אחד הניסויים השיטתיים הראשונים שנערכו אי-פעם ובישר על הולדת המדע ***האובייקטיבי*** זה השואף לבסס את התאוריות המתפתחות בו על השערות ובודק אותן באמצעות ניסויים. את הניסויים המדעיים שנערכו מאז אפשר לדמות לשינוי פרמטרים של אותו ניצן מדעי שהוליד גלילאו לראשונה.

אמנם חלף זמן רב מאז נפילת אותן שתי אבנים, אך ניתן עדיין להתבונן בניסוי מחדש כדי לנסות ולגלות בו הבנות נוספות. המדע הקלאסי שנבנה מאז, הרי דומה לאותו מגדל. הוא נבנה באופן שיטתי קומה אחר קומה. כך ניתן להשקיף מלמעלה על מכלול כל הדברים כדי לנסות ולגלות בהם חוקיות וסדר. אבל גבוה ככל שיהיה, רם מכל מבנה מוכר , עדיין קומתו סופית.

גלילאו עלה על המגדל בגלל נטייתו הצדה בזווית, כך יכול להבטיח שיראה את תוצאת הניסוי כשיגיעו האבנים למטה. נטיית המגדל מסמלת את ההכרח של מעורבות הצופה בתופעה שבה הוא צופה. גובה המגדל מהקרקע נמוך מעט מאורכו האמיתי. ההפרש או מידת אי-הוודאות מרמזים על עקרון אי-הודאות של תורת הקוונטים הנובע מהמפגש בין סובייקט לאובייקט. חישוב מידת אי-הודאות נעשה הן במגדל פיזה והן בתורת הקוונטים באמצעות משפט פיתגורס על היתר במשולשים ישרי זווית.

במאה העשרים הגיעה המתודה המדעית לשיאה, אך גם לגבולה עם הפיתוח של תורת היחסות ותורת הקוונטים. זהו שיא החתירה לאובייקטיביות טהורה. אך מכאן ואילך נצטרך להכיל בתיאורנו את הטבע גם את שפת המדע כאיבר התבוננות. צריך ליצור שפה שממזגת את ההתבוננות המדעית הסובייקטיבית כמו זו של אריסטו עם המתודה המדעית הקלאסית האוביקטיבית שאותה יצרו גלילאו וניוטון.

כך תבוא לידי ביטוי באופן אורגני המידה ההכרחית של אי-הודאות, המפגש המתחייב שבין האובייקט לסובייקט והארעיות הקבועה של הידיעה. מדע כזה יצליח לתאר לא רק את העולם, אלא גם יכיל את עצמו כתופעה בעולם. מפגש בין עצמים דוממים בתנועה תמידית לבין בני-אדם בעלי תודעה המפתחים שפה, שהיא גבול חי בין ממשות לדמיון. אז יחייכו אריסטו וגלילאו במרחב ללא זמן ,כשתהדהד לעד תוצאת הניסוי המשותף שלהם, האבן של אריסטו תיפול יחד עם האבן של גלילאו. ניסוי שאינו מסתיים לעולם. סב המדע מתבונן במבט של נצח על צאצאי הבנותיו.

הבנה ראשונית

מספר גדול מ- 1 המתחלק אך ורק בעצמו או ב- 1 נקרא מספר ראשוני, ומספר שאינו ראשוני נקרא פריק. המספר 10 , לדוגמה הוא פריק, כי 2*5=10 וגם המספר 24 הוא פריק, כי למשל 4*6=24 , אבל המספר 7 הוא ראשוני, כי אין דרך לפרק את 7 אלא ל 1*7 כך גם המספר 31 ועוד הרבה מספרים אחרים. את קבוצת הראשוניים ניתן לסדר בסדרה שמתחילה כך: 2,3,5,7,11,13,17,23,29,31 . על השאלה אם קיימים אין-סוף ראשוניים או שמספר הראשוניים הוא סופי, ענה המתמטיקאי היווני אויקלידס שמצא הוכחה פשוטה שיש אין- סוף ראשוניים. נניח בשלילה כי היה רק מספר סופי של ראשונים, למשל 100 ראשוניים.

ידוע גם שכל מספר הוא מכפלה של ראשוניים ולכן 100 הראשונים הללו יוצרים ע"י הכפלה את כל המספרים הטבעיים. נתבונן אם כך במספר x , שנוצר מהכפלה של מאה הראשוניים הללו והוספה של אחת לתוצאה. אם x הוא מספר ראשוני, אז קיבלנו בסתירה מספר ראשוני חדש גדול יותר מכל 100 הראשוניים, ואם הוא מספר לא ראשוני, אז בגלל התוספת של ה -1 הוא לא מתחלק באף אחד ממאה הראשוניים ולכן הוא מתחלק במספר ראשוני אחר, ולכן יש מספר ראשוני שאינו כלול במאה הללו. בכל מקרה יוצא שקיים מספר ראשוני אחר מלבד ה- 100 . ההנחה שיש מספר סופי של ראשוניים לא נכונה, ולכן קיימים אין-סוף ראשוניים .
למרות פשטות התחום נותרו מספר רב של בעיות פתוחות הקשורות למספרים ראשוניים. האם קיימים אין-סוף זוגות תאומים ראשוניים, מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2 , למשל 3,5 9,11 וכו' ?

שתי המשוואות 143*7=1001 1001=7*143 נראות לנו זהות, אבל הראשונה פירושה כפל של 7 ו- 143 והשנייה פירושה פירוק של המספר 1001. מנקודת המבט של מורכבות החישוב קיים הבדל בין שתי המשוואות, כי קל יותר להכפיל מאשר לפרק לגורמים מספר נתון. על יסוד הבחנה זו עומדת שיטת הצפנה עם מפתח ציבורי שנקראת RSA. אך כדי ליישם את השיטה זקוקים למספרים ראשוניים גדולים מאוד. זה דורש הרבה מאוד זמן חישוב והופך את השיטה כמעט ללא מעשית.

פריצת דרך בגילוי של ראשוניים גדולים הייתה השיטה שגילה מ. רבין למציאת מספרים שהם פסאודו ראשוניים , כלומר ראשוניים בהסתברות גבוהה למדיי. השיטה מתבססת על משפט פרמה הקטן, שאומר שלכל מספר ראשוני P מתקיים $a^{p-1} \equiv 1 \bmod (p)$. אז בהינתן מספר כלשהו N בודקים אם המשוואה הזו מתקיימת עבור 100 מספרים A , ואם כן אז כולם עדים לראשוניות של P . כך מקבלים מספרים ראשוניים בהסתברות לטעות זעירה.

אך גם לשיטה זו מוגבלות, כי עבור מספרים גדולים מאוד הצפיפות של הראשוניים היא $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)}$ קטנה יותר מהסיכוי לטעות באלגוריתמים של רבין, ולכן המספרים שיתקבלו בשיטה יהיו לרוב לא ראשוניים.

כל ניסיון להבין את העולם או לברוא אותו באמצעות שיטה, אלגוריתמים או נוסחה סופית, הוא בסופו של דבר מוגבל. אמנם כל מספר ניתן לכתיבה באמצעות מכפלה של מספרים ראשוניים, אבל באמצעות מספר סופי של מספרים ראשוניים לא ניתן להגיע ולכתוב את כל המספרים. זוהי ההבנה הראשונית שעלינו לקבל, את אין-סוף הראשוניות והיצירה שיש בעולם.

צדק נראה

אחת מנקודות המפנה בתולדות המדע הייתה כאשר הצליח ניוטון לנסח חוק טבע באמצעות כתיבה של משוואה מתמטית. החוק השני של המכניקה קובע כי הכוח הפועל על גוף נמצא ביחס ישר למסה של הגוף ולתאוצה המוענקת לו. מאז אותה משוואה מפורסמת התפתחו תורות פיסיקליות שונות באמצעות כתיבה של חוק יסוד מתמטי המתאר אותן. כך, למשל, מנוסחות משוואות הגרוויטציה העולמית חוק המשיכה בין מטענים חשמליים, משוואות מכסוול לגבי גלים אלקטרומגנטיים, משוואות תורת היחסות הפרטית והכללית ומשוואות שרדינגר בתורת הקוונטים.

$$H\psi - E\psi = 0$$

ראו מה קרה לפיתגורס. ל הוא כתב $a^2 + b^2 - c^2 = 0$. בתחילה זו הייתה רק טענה, אחר- כך נמצאה לה ההוכחה, לכן קראו לזה משפט פיתגורס, לבסוף גם אמרו שזהו חוק עולמי. אך שימו לב לשימוש במילים: טענה, הוכחה, משפט, חוקים. אין פלא אם כך כי אחת מהמטרות החשובות של מדענים היא לנסות ולנסח חוק טבע עולמי, אשר יכלול בתוכו את כל התופעות בטבע. מן הסתם משוואה שכזו צריכה להראות משהו כמו :

$$\mathbf{u=0}$$

השאלה היחידה שעוד נותר לברר היא מהו אותו u שיסדיר חוקיות עולמית. אם צדק זה צריך להיראות ולא רק להתנסח, נתבונן בדוגמא של כוכב הלכת צדק. אותו כוכב שירחיו היו עדות לגלילאו לכך שכדור הארץ אינו במרכז העולם, והוא מאיר גם מתוך עצמו בשל היותו כמעט שמש.

כבר יותר מ- 400 שנים אנחנו צופים באחת התופעות המרשימות המתחוללת על צדק. עין אדומה שהיא מערבולת גזים ענקית, שכדור הארץ יכול היה להיכנס לתוכה אלפי פעמים. למרות שצדק עשוי כולו גז, נשמרת בו מערבולת יציבה במשך מאות ואולי גם אלפי שנים.

המדע הרגיל, זה שמנסה להיכתב בצורה $U = 0$, אינו יכול עדיין להסביר תופעה מעין זו. איך נשמרת יציבות שכזו בתוך מרחב כזה של כאוס? בדומה לבריאה שיש בה איזון עדין ומופלא בין סדר לאי-סדר? האם קיימת איזו מערכת פורמלית שיכולה לא רק לנסח מבנים שכאלה, אלא להיראות קצת דומה.

אך אם נביט היטב באותה משוואה ובאותם כתמים של דיו המונחים על הנייר , נראה כי המרחק ביניהם לבין התופעה על כוכב צדק אינו כה רב. למרות שהכתמים נראים דוממים, יש בהם תנועה גם אם היא מיקרוסקופית של חלקיקי החומר אשר מרכיבים אותם. קיימת תנועה מתמדת של תודעה שהצופה בהם ומגלה בהם משמעויות חדשות כל פעם. המילים עצמן הכתובות על הנייר אינן מגיחות אלינו כבני אדם באותו זמן, אלא כל אחת מהן היא בזמן אחר של התפתחות האנושות . לכן עצם הופעתם על אותו דף נייר משקפת זמנים שונים של התפתחות. יוצא אם כך כי אותה משוואה פשוטה בהחלט יכולה לתאר מצד המראה הפנימי שלה אותה תופעה שמתרחשת על כוכב הלכת צדק.

יש שחר לניסיונות לנסח בכתב חוקיות בסיסית על העולם, אבל היא צריכה להתפרש לא רק מצד המשמעות שלה, אלא גם מצד האופן שבו היא נראית. ואם דבר זה יתרחש, נוכל להגיד כי אכן , צדק נראה.

אי-הידיעה

כשנפנה את מבטנו לעבר שמי הלילה, נראה את הכוכבים עומדים במקומם, ולמרות זאת אנו יודעים שהיקום מתפשט. 15 מיליארד שנים מאז היה היקום מרוכז בנקודה הגיע לידיעתי התיאוריה של המפץ הגדול. הד אותה התפוצצות מעלה צלילים של שאלה - האם היקום יתפשט לעד או אולי מכוחות המשיכה ייעצר ויחזור לאותה נקודת בראשית, וכך כמטוטלת-עד? אך שאלה זו לא הייתה ללא מובן בטרם תיאוריית המפץ הגדול, כי רק ידיעת ההתפשטות הביאה את שאלת ההתכווצות. מסתבר אם כך שהתפשטות העולם אינה רק בחומר, אלא גם בתודעה של האדם. הבנה זו מעוררת שאלה חדשה- מה גדל מהר יותר לאורך זמן, הידיעה של האדם או אולי אי-הידיעה? או שניהם יחד?

ב- 2000 השנים האחרונות, כלומר בשבריר שנייה של גיל היקום, חשבו בני- אדם רבות על שאלה דומה: מי תגיע לקרקע קודם אבן כבדה או אולי אבן קלה? קלה. אריסטו לא ניסה, אבל הסביר מדוע הכבדה תגיע קודם, גלילאו זרק שתי אבנים וגילה דווקא שהן מגיעות יחדיו. לעומת זאת אינשטיין בחר להתבונן באנשים שמדברים ומודדים את הניסוי. הוא הסביר מדוע המסה של המשיכה מתלכדת עם המסה של התאוצה.

את כל ההבנות הללו אשר מקורן בתנועה ביקום ובמחשבה של האדם, ניסו במהלך השנים לתרגם לתנועה של כתמים על דף נייר. המשוואה שכתב ניוטון $f=ma$ המכונה החוק השני של המכניקה, הסבירה את כל התנועה שמתרחשת ביקום. היא תרמה למדע למדע את מושג הנגזרת ואת האידאל של הפורמליות המתמטית. זה דמה לתא בסיסי של חיים, שכל התורות המדעיות שבאו אחר-כך ניסו לחקות. אם כך עולה כרגיל שאלה חדשה - האם נוכל לנסח את השאלה ביחס לאי-הידיעה גם באמצעות מתמטיקה?

כדי לנסות לענות על שאלה זו אפשר להעלות בדמיון דיאלוג שלא התרחש בין גלילאו וניוטון סביב שאלה זו. אחת המסקנות של דיון זה היא עקרון שימור אי-הידיעה. היחס שנשמר בין הידוע ללא ידוע. כמו בלון שמתנפח באוויר היחס בין השטחים הידועים לשטחים הלא ידועים נשמר .

במשוואה זו ה m עם סימן התפוח מעליו הוא הכללה של מושג הנגזרת. פעם אחת משמעות הגזירה יכולה להיות כללי הגזירה של הלוגיקה, והמשוואה מבטאת את המהות הפורמלית של המתמטיקה. פעם אחרת סימן התפוח יכול להיות נגזרת של פונקציה במובן של ניוטון. אבל ייתכן שאלו הן רק שתי דוגמאות אפשריות למושג הנגזרת. הכללה של מושג הנגזרת כמפגש או זיקה בין הווה לנצח עשויה להוליד סוג חדש של מתמטיקה, שהמשותף להם הוא אותה משוואה אבל לא כנקודת מוצא אלא כסיום.

אם מתבוננים בכל מה שנכתב עד עכשיו. בעיניי סופר זה יכול להיראות כניסיון לכתוב סיפור, והוא לא יבין מדוע הנוסחאות המתמטיות מופיעות בכלל. בעיניי מתמטיקאי או פיסיקאי זה עשוי להיראות חסר כל מובן. נימוקים סובייקטיביים לנוסחאות מתמטיות.

כנראה שמשהו לקוי במחשבה שאפשר לנסח אמת באמצעות מילים, שהן קפואות בניגוד לתנועה של החיים. הבנה יכולה להיווצר בשיחה עם אחר. הנכתב אם כך הוא הזמנה לשיחה, היכרות ראשונית עוד בטרם הייתה הפגישה. ידיעה בעולם היא תמיד בזיקה עם אדם אחר. השיחה אינה על העולם כשלעצמו אלא בוראת אותו כמעשה משותף. שני אנשים שמשוחחים בוראים שני עולמות יחדיו. זהו מפגש פורה השומר על המידה הקבועה של אי- הידיעה.

מגיעים יחד

ניוטון: אני מתבונן במדע עם פתיחת האלף החדשה, ונראה שהתפוח נפל רחוק מהעץ.
גלילאו: מה שחסר אולי במשוואה הראשונית שלך f=ma הוא ציון העובדה שמדובר בתופעה אנושית. תפוח נפל על ראשך ועורר בך חשיבה מסוג חדש על העולם. צריך להכניס סימון ישר לתוך המשוואה. יום אחד ישב אדם מתחת לעץ, ונפל על ראשו תפוח שהביא אותו לכלל ידיעה על העולם אשר אותה הוא ניסח במשוואה:

סימן התפוח למעלה מציין שנפילת תפוחים כמו אבנים היא תופעה אנושית. משוואה זו נוצר גם המדע. אם מתבונן בפרספקטיבה של זמן על מה שנוצר מהמשוואה, אפשר להוסיף למשוואה הזו משהו שמבטא את זה. כלומר שהמדע s הוא תולדה של המשוואה הזו אשר נוצרה, כאמור, מנפילת התפוח על ראשך.
נ: יש כאן בעיה. המדע אינו יכול להגדיר את עצמו באמצעות תופעה או התרחשות שהיא חלק ממנו. הגדרה פנימית, ולא חיצונית, מתקיימת בתופעות החיים. תופעה שיכולה לחיות כתנועה אורגנית של פעילות אנושית בעולם. כמו שתא חי שומר על ערכים מסוימים (חום , לחץ רמת PH וכו׳) כך המדע כיישות חיה הוא ארגון ששומר על מבנה מסוים.

נדרשת מאתנו התבוננות חדשה בנפילת שני האבנים, לא באמצעות הדמיון כמו שנהג אריסטו, לא באמצעות החושים כמו שעשיתי אני, ולא ברמת מושגים כפי שנהג אינשטיין. התבוננות רביעית תתבטא ברמה של תיאוריות מדעיות. לפנינו שתי תיאוריות מקבילות, האחת- אנטרופיה תרמודינמית והשנייה האנטרופיה של תורת האינפורמציה. מדוע הן מתלכדות? יש כאן מפתח לתעלומה של המדע המתחיל לחקור גם את עצמו- אי ידיעה חדשה המשמרת תמיד בכל רמה חדשה של הבנה. זהו עקרון שימור אי-הידיעה כמשהו שיכול לאחד את המדע.
ג: כמו גוף חי ששומר חומו או על PH , המדע כישות אורגנית שומר על מידת אי-הידיעה. זהו ניסיון לתאר כמותית ואמפירית את המשפט ״ אני יודע שאני לא יודע״
נ: אתה מאמץ את פתרונו של סוקרטס, אך קיים פתרון נוסף: ״ אני לא יודע שאני יודע״
סוקרטס הוא אכן הוא בן תמותה אבל גם הלוגיקה שלו המבוססת על הכלל של מודוס פוננס, אין בה תרתי משמע של החיים עצמם. כי הידיעה הלוגית מופיעה תמיד בסוף. האם קיימת ידיעה שהיא בראשית? אם נרצה מדע חי , נצטרך לנסח את המשוואה :
ג: סימן התפוח המופיע כאן הוא הרחבה בתודעת האדם של מושג הנגזרת, החוק השני של המכניקה הוא, למשל ,ערך עצמי ופתרון אפשרי של המשוואה המטפורית:

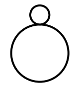
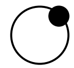
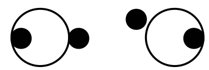
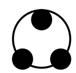
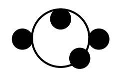
נ: דווקא זה היה הערך של עצמי ברחבי העולם, אבל די בהפרדה שבין אני לאתה, בין סובייקט לאובייקט, בין צורה למשמעות. אפשר להעביר אגף ולקבל את הצורה :

ג: כלומר שחיבור של צורה עם המשמעות הנגזרת ממנה מתאפס. נגזרת ראשונה היא כללי הלוגיקה, נגזרת שנייה היא מושג הנגזרת שהמצאת במכניקה, אבל כאן סימן התפוח מייצג הכללה של מושג הנגזרת כהופעה של השלם המתגלה בחלקו.
נ: זוהי משוואת שימור אי-הידיעה. המתמטיקה הרגילה הדו-הערכית של 0 או 1 היא פתרון אחד של המשוואה, היוצרת את חוקי הלוגיקה הרגילים. כמשוואה ממשית פירוש הדבר שיש אולי פתרונות אחרים. הפתרון הגאומטרי של המשוואה אומר שקיימת מתמטיקה שצורתה מתלכדת עם תוכנה. אבל קיימים גם פתרונות דמיוניים למשוואה הזו: I -1, -I, 1 . הראשון I הדמיוני של התבוננות אריסטו, לך גלילאו הממשי -1 אחר- כך -I לאיינשטיין , ולבסוף חזרנו ל- 1 בהתבוננות החדשה - סגירה של מעגל היחידה בזויות ישרות, וכך נפתרת החידה . תורת היחסות היא הרי תורת השימור, ותורת הקוונטים היא תורת אי- הידיעה. בנקודת המבט של שימור אי הידיעה תורת היחסות ותורת הקוונטים עשויות להתאחד.

ג: האם גילוי זה מבטיח לנו שהתפוח לא ייפול הפעם רחוק מהעץ?
נ: יש כאן משוואה הבסיסית של התנועה, יש כאן הנגזרת של המהירות, הפורמליות המתמטית, החוויה הסובייקטיבית שלי של נפילת התפוח על ראשי, לבסוף יש כאן היציבות המדעית לאורך השנים, זו אשר נוצרת מאיזון בין ידיעה לאי-ידיעה.
ג: דבריך נראים חסרי מובן בשפה האנושית והמתמטית הרגילה.
נ: המשוואה הזו אינה נקודת סיום של תהליך, אלא דווקא נקודת התחלה ליצירה של שפה מתמטית חדשה, כזו המכילה בתוך עצמה גם את תהליך היווצרותה. אלו הם חוקי תנועה חדשים לא של העולם לבדו, אלא של התודעה האנושית המנסה לכונן בתוך עצמה את הבנה שלמה של העולם.
ג: באווירה יחסית אופטימית זו, הרשה לי לשאול אותך ידידי, אם ניפול עכשיו שנינו מהענן על כדור הארץ, מי לדעתך יגיע קודם, אני או אתה?
נ: ברור שאני.
ג: גם הפעם צדקת. הרי אני זה אתה. עיקרון שימור אי הידיעה.

תשובה בשאלה

רוצים להכין שרשראות המורכבות מארבעה חרוזים שחורים או לבנים. כמה שרשראות שונות ניתן להכין בהנחה, ששתי שרשראות הן זהות, אם ניתן להגיע מאחת אל האחרת באמצעות סיבוב השרשרת?

חרוזים לבנים	חרוזים שחורים	שרשראות שונות	מס׳ שרשראות
4	0		1
3	1		1
2	2		2
1	3		1
0	4		1
		סה״כ	6

באופן עקרוני יש 2 בחזקת 4 שרשראות שונות , כלומר 16. אם מסובבים את השרשרת ב 90 מעלות רק שתיים נשמרות, אם מסובבים כנ״ל ב 180 מעלות, יש ארבע שרשראות שנשמרות, ואם מסובבים ב 270 מעלות נשמרות שתי שרשראות. את התוצאה של שש שרשראות שונות ניתן לקבל גם בחישוב : **6=(16+2+4+2)/4.**

שאלה הזו ניתן להכליל על שרשרת עם יותר חרוזים ויותר צבעים. האם קיימת דרך למנות את מספר האפשרויות מבלי לעבור על כל הצירופים השונים ומיונם לקבוצות שקולות? תשובה לשאלה מצאו המתמטיקאים ברנסד ופוליה, שהכלילו את הבעיה לקבוצה כללית X של עצמים ולחבורה G של תמורות, המעבירות איברים של X לאיברים אחרים. השאלה היא כמה מחלקות שונות יש בסך-הכל. הנוסחה שגילו למספר מחלקות השונות:

$$|W| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} fix(g)$$

פוליה כתב את הספר ״כיצד פותרים״ שבו הוא מנסה לתאר דרכים שונות, היכולות לסייע להגיע משאלה כלשהי במתמטיקה לתשובה. את השיטה שלו הוא מסכם בארבע נקודות עיקריות. ראשית, עלינו להבין את השאלה, כלומר עלינו להחיות את השאלה בצורות שונות, עד שנבין ונראה את הבעיה לעומקה. בצעד השני עלינו להעלות בדמיוננו איזו תוכנית או רעיון שיוכלו לסייע לנו בפתרון. אנחנו יוצרים איזה דימוי של תנועת הפתרון. לאחר מכן עלינו להתנסות בתכנית הפתרון הלכה למעשה עד אותו רגע שהפתרון יתגלה. לבסוף עלינו להתבונן בכל התהליך בצורה הפוכה, מהמטרה שאליה אנחנו נעים אל נקודת ההתחלה.

בדומה לחוט שמקשר חרוזים, כך גם השאלה והתשובה הן חלקים של שלם אחד. התשובה חבויה בתוך השאלה כזרע. עלינו להתבונן בשאלה ולחפש את הדרך לפתרון. כלומר באמצעות השאלה לראות תמונה של אדם כשהוא בדרך לפתור את השאלה. ענני הדמיון שממטירים את גשם הראיה, התשובה כתהליך חבויה בשאלה כמו מחרוזת.

משוואה עברית

לכל אות בעברית קיים מספר המכונה הגימטריה של אותה אות. הגימטריה של האות אל"ף היא 1, הגימטריה של האות בית היא 2 הגימטריה של האות גימ"ל היא 3 , הגימטריה של יו"ד היא 10. אחר-כך החוקיות משתנה והגימטריה של כ"ף היא 20 של למ"ד היא 30 וכו' עד לאות קו"ף שהגימטריה שלה היא 100 . אם נסמן באות גימ"ל את פונקציית הגימטריה, אזי בהמשך מתקיים ג(ר)=200 ג(ש)=300 ולבסוף ג(ת) =400 .

לכל מילה בעברית מגדירים את פונקצית הגימטריה על-ידי סכום הגימטריות של האותיות. למשל הגימטריה של המילה [שמש] היא 640=300+40+300 , או בכתיבה אחרת ג(שמש)=640 וכנ"ל ג(דלת)= 434 , ג(חתול) = 444 ג(לב)=32 ג(בכי)=32 .

שתי מילים בעברית יכונו שקולות גימטרית או בקיצור שקולות, אם ערך הגימטריה שלהן הוא זהה. למשל לב~בכי כי ג(לב)=ג(בכי)=32 .

אם אורך של המילה מ בעברית הוא ד אותיות אז ג(מ)<= ד*400 , כי הערך המכסימלי של גימטריה של אות הוא 400 . נסמן ב- ד את הפונקציה של אורך המילה, לדוגמה ד("שמש")=3 . מאחר שלכל מ ד(מ)<10 (פונקציה האורך של המילה) . קיבלנו חסם עליון ג(מ)<4000 . הערך המינימלי של ג , הוא 3 והוא מתקבל במילה אב ולכן:

2 < ג(מ) < 4000

אם בהערכה גסה מספר מילים בשפה העברית הוא 100,000 הרי בממוצע לכל מילה בעברית יש לפחות 25=100,000/4000 מילים שקולות.

לכל מספר טבעי ב יש ייצוג מילולי בעברית. למשל הייצוג של 1 הוא [אחת] הייצוג של 2 הוא [שתיים] והייצוג של 10 הוא [עשר], אם נסמן ב י(ב) את פונקצית הייצוג המילולי של מספר ב אז אפשר לכתוב י(32)= [שלושים ושתיים] י(100)=[מאה].

עבור מספר טבעי ב אפשר עכשיו להגדיר את הערך הגימטרי שלו באמצעות חישוב הגימטריה של הייצוג שלו למשל הערך הגימטרי של המספר 1 הוא ג(אחת)=409 והערך הגימטרי של 20 הוא ג(עשרים) = 620 . את הערך הגימטרי של מספר ב נסמן בפונקציה ע(ב).

ב	י	ע
1	אחד	409
2	שתיים	770
3	שלוש	636
4	ארבע	273
∞	אין-סוף	207

הנה כמה משוואות מתמטיות שמעוררות מחשבה האם קיים עבורן פתרון ואם יש דרך לפתור אותן או להראות שלא קיים עבורן פתרון.

ע(ב)=ב

1. **ע(ע(ב))=ב**
2. **ע(ב+ג)=ע(ב)+ע(ג)**
3. **ע(ב*ג)=ע(ב)*ע(ג)**

לסיכום הדברים, עולה שאלה לגבי הערך האפשרי של שימוש בסמלים עבריים בכתיבה מתמטית. האם ניתן ליחס ערך מתמטי כלשהו מלבד הגימטריה למילה נתונה בעברית. למשל הפירוש המתמטי המדויק שמצא קנטור למילה אין-סוף מלבד הערך הגימטרי 207 של המילה.

שד מתמטי
שני משולשים שנמצאים במישור נקראים חופפים, אם אפשר באמצעות ביצוע של פעולות סיבוב או הזזה או היפוך להניח אותם זה על זה במדויק. זה קורה אם הם זהים בשישה אלמנטים, שלוש צלעות ושלוש זויות. משפטי החפיפה מראים שבדרך-כלל די בבדיקת שיוויון שלשה מרכיבים כדי להוכיח ששני משולשים הם חופפים. באותו אופן אפשר לדון בשאלה מתי שני מלבנים הם חופפים או מתי שני ריבועים הם חופפים. הגאומטריה האוקלידית דנה במושגי זהות הנגזרים מסימטריה הנוצרת מכך שאפשר להניח צורה על צורה בדיוק. הפעולות הבסיסיות המותרות לנו הן הזזה, שיקוף, וסיבוב . כמו-כן מותרות פעולות המשלבות תנועות הללו. בצורה זו מתקבלת הגדרה מדויקת של הצורות החופפות בגאומטריה אוקלידית .

נניח עכשיו ששני המשולשים עשויים מחומר אלסטי, ואנו רשאים לעשות גם תנועה אלסטית של מתיחה או כיווץ. אם כך, ניתן להגיע מכל משולש לכל משולש אחר. תנועה כזו מותרת בגאומטריה אחרת שנקראת טופולוגיה. במסגרת הטופולוגיה שני המשולשים הם זהים זה לזה וגם זהים לריבוע, ע אבל הם אינם זהים לצורה אחרת שיש בה איזה חור.

מלבד גאומטריה אוקלידית וטופולוגיה, קיימים סוגים אחרים של גאומטריות. למשל גאומטריה פרויקטיבית או גאומטריה אפינית ועוד.
בשנים האחרונות התפתחה גאומטריה חדשה שנקראת גאומטריה לא חילופית, שבה המרחק בין שתי נקודות תלוי בשאלה מאיזו נקודה מודדים.

מה שמאפיין כל סוג כזה של גאומטריה הן אותן סימטריות בסיסיות, שמגדירות את מושג הזהות של עצמים. המתמטיקאי פליקס קליין הציע לאפיין את כל הסוגים השונים של הגאומטריות באמצעות חבורת התנועות המותרות המגדירות את השקילות העצמים השונים בגאומטריה.

האם ניתן להרחיב את הרעיונות של קליין בגאומטריה לתחומים מתמטיים נוספים. כדי לנסות ולעשות זאת עלינו להתבונן ביצירה המתמטית לא כפי שהיא מופיעה במישור הדף ככתמי דיו המונחים על גבי דף נייר. את הגילויים המתמטיים השונים אפשר להציג כסוג של זהות או חפיפה בין סוגים שונים של תנועות שלמות. המשוואה המתמטית הראשונה מתגלית כשמחברים מספרים. אם נחבר את a לעצמו b פעמיים נקבל את אותו מספר כמו אם נחבר את המספר b לעצמו a פעמים. שתי התנועות השלמות הללו במרחב מתלכדות במשוואה מתמטית פשוטה :

$$ab=ba$$

התמזגות מעין זו אפשר לתאר באמצעות ציור של רצועת מביוס, שהיא רצועה רגילה המודבקת הפוך. לרצועה הזו יש רק צד אחד.

בקבוק קליין התגלה בשנת 1822 על ידי פליקס קליין בעקבות השראה שקיבל מרצועת מביוס. זהו משטח דו-ממדי הקיים רק במרחב ארבע ממדי. הוא מתקבל כשלוקחים את רצועת מביוס ומבקשים להדביק את שתי השפות שלה זו לזו. ההדבקה הזו אינה אפשרית במרחב שלשה ממדים, כי יש כאן פיתול שלא ניתן לממש אותו במרחב שלנו. כדי להצליח לעשות זאת אנחנו צריכים לצאת לממד נוסף.

יתכן איפוא לתאר את היצירה המתמטית כולה ואת הסימטרייה המגולמת בה באמצעות הגאומטריה של בקבוק קליין. כדי להבין אותה צריכים לצאת לממד חדש של ראיה שהוא לא רק לוגי והגיוני. התיאור שלם של מה שקורה כשכותבים ויוצרים מתמטיקה . זוהי שפה המכוננת את עצמה, וכל איבר הקיים בה מלבד קיום עצמאי הוא מתייחס גם אל כל השלם.

צריך להיווכח

נניח שאלוהים קיים, והוא מתעניין מידי פעם במתמטיקה. הוא מתבונן מידי פעם על העולם שאותו ברא, מנסה לראות את הסמליות שיש בו עבורו. יום אחד הוא מחליט לדון עם עצמו בשאלה אם בני-אדם מבינים מתמטיקה. הוא מעלה בדמיונו ויכוח בין המתמטיקאי אוילר, שמאמין בקיומו, ובין דידרו שהוא אתאיסט מושבע. נושא הויכוח, האם אלוהים קיים ?

אוילר כותב שלכל שני מספרים a,b קיים מספר שלישי n ששווה ל a בחזקת b ועוד 1 , ומכאן נובע שאלוהים קיים. אלוהים יודע שבמקרה זה אוילר ירא האלוהים יודע שדידרו הוא ירא מתמטיקה ולא יוכל להביא שום טיעון מנגד. בזמן אחר מגלה אוילר נוסחה המקשרת בין חמשת המספרים החשובים במתמטיקה. הקשר מעורר תחושה אצל בני-האדם שאלוהים קיים.

המתמטיקה, חוקי הטבע וגם אלוהים הם תופעות אנושיות. כל תופעה נצפית על ידי- אדם שאם לא כן היא אינה תופעה. אדם שואף לנצח ומדבר עם אלוהים, בין אם הוא קיים באמת או שהוא קיים רק בדמיונו.

תפוח אמיתי או דמיוני נופל מעץ הדעת על ראשו של ניוטון ועוזר לגלות את הכוח של הנגזרת בהבנה פורמלית של התופעות בעולם. חשיבות קצב ההשתנות של הדברים בעולם ולא הערכים המוחלטים שלהם. חוקי הטבע מנוסחים כחוקי השימור שבהם נשמרת סימטרייה מסוימת.
במשמעות החדשה שבה אין תופעות ללא אדם, האדם יוצר נגזרות באמצעות השימוש שהוא עושה בסמלים. כל סמל הוא בבחינת נגזרת של תמונה שלמה. משחק מראות אין -סופי שבו אי-הידיעה גדלה במקביל לגידול של הידיעה, כי העולם משתנה בהתאם. כל מושג שיוצר האדם מביא עמו שאלות חדשות, וידיעת האדם יוצרת עולם שלא היה שם קודם. הצלחה בניסוח פורמלי של עיקרון זה של שימור מבטאת הבנה סופית, אך לא מוגבלת לעולם התופעות.

הסימן m מייצג זיקה כלשהי לעולם ושפה כלשהי שמתפתחת בו. סימן התפוח למעלה הוא הכללה כלשהי למושג הנגזרת. הסימן + מייצג את האינטרקציה בין לוקליות לגלובליות ו- 0 מציין את אי- הידיעה כעיקרון מייצב של החיים.

אנו מכירים עד היום 2 פתרונות למשוואה זו . הראשונה היא המתמטיקה הלוגית הרגילה שבה סימן הנגזרת משמעותו גזירה של משפטים מתוך אכסיומות. החיבור הוא בינרי והפתרון הוא כל המשפטים הנכונים בתורה שהם סגורים מבחינת פעולת הגזירה וההיסק הלוגי. דוגמה שנייה היא הפיסיקה הקלאסית שמשמעות הגזירה היא כמו שיצר ניוטון פונקציה כפוטנציאל.

מציאת פתרון נוסף למשוואה זו עשויה לקרב אותנו להבנה שלמה יותר של העולם ולמצוא תורה חדשה, שהטלות שלה, הן תורת היחסות כתורת שימור גלובלית ותורת קוונטים שהיא תורת אי-הידיעה לוקלית. כשדבר זה יקרה, ייסגר מעגל שפתחנו בו, הפרדה מדומה אל המתמטיקה.

תהודת הבריאה

אפשר לברוא עולם מזערי, שיש בו בסך-הכל 16 מצבים שונים. עולם זה מורכב מסדרות בנות ארבע ספרות, שכל אחת מהספרות היא הספרה 0 או 1 . בעולם זה נגדיר חוקיות של השתנות, כלומר כלל המעביר מצב נתון של העולם למצב אחר. כל ספרה בשלב הבא תהיה פעולת החיבור של הספרות הסמוכות לה כולל היא עצמה. עלינו לזכור שבשדה המספרים 0,1 מוגדרת פעולת החיבור בדרך שונה. 0+0=0 1+0=1 0+1=1 1+1=0. דיאגרמת המעברים של העולם הזה היא כזו:

0000→0000	0001→0011	0010→0111	0011→0100
0100→1110	0101→1111	0110→1001	0111→1010
1000→1100	1001→1111	1010→1011	1011→1000
1100→0010	1101→0001	1110→0101	1111→0110

את המסלולים השונים אפשר לכתוב בטבלה:

א	ב	ג	ד
0000	0001	1000	1111
	0011	1100	0110
	0100	0010	1001
	1110	0111	
	0101	1010	
	1101	1011	
(0)(0)(0)(0)	(1/3)(2/3)(1/3)(2/3)	(2/3)(1/3)(2/3)(1/3)	(2/3)(2/3)(2/3)(2/3)

במסלול א, כלומר מהסדרה 0000 , אנחנו מיד חוזרים לעצמה. במסלול ב אנחנו חוזרים אל המצב ההתחלתי שישה שלבים, כך גם במסלול ג ואילו במסלול ד אנחנו חוזרים להתחלה לאחר שלושה שלבים. בכל מקרה, מכל אחד מהמצבים אנחנו חוזרים למצב שיצאנו ממנו לאחר מספר סופי של צעדים .

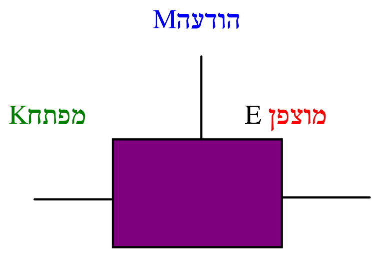
במשחק הספרות היינו יכולים להגדיר חוקיות אחרת, משום ש- 16 מצבים יכולים לעבור ל- 16 מצבים אחרים, יש 16 בחזקת 16 עולמות שונים שאותם אנחנו יכולים לברוא באמצעות ארבע ספרות. ייתכן שלכל אחד מהעולמות הללו יש מבנה אחר של מסלולים, מחזוריות אחרת וספקטרום אחר של ספרות בכל אחד מהמסלולים השונים. עבור עולם בעל 5 ספרות היינו יכולים לברוא 32 בחזקת 32 עולמות שונים, ובאופן כללי עבור עולם עם N ספרות היינו יכולים לברוא (2 בחזקת N) בחזקת (2 בחזקת N) עולמות שונים.

אם היקום רוטט בתדירות מסוימת במעברים שלו שבין 1 ל 0 , ונחליט אף לצבוע את הנקודה בשחור בכל פעם שמופיע 1 ,ובלבן בכל פעם שמופיע 0 , אז נראה צבע לבן ושחור מתחלפים ביניהם. אם הרטיטה תהייה די מהירה לא נבחין עוד בשחור או בלבן. מה שנראה לנגד עינינו יהי הופעה של ספקטרום צבעים . כמו שגילה גיתה שהאמין שדווקא הצבע הלבן והשחור הם התופעות הבסיסיות של הצבעים, ושאר הצבעים נוצרים ממזיגה שלהם בפרופרציות מסוימות.

היקום שבו אנו חיים נוצר לפני מיליארדי שנים באירוע המפץ הגדול. כל העולם היה מרוכז בנקודה סינגולרית אחת. אז נוצר המימן ביקום המורכב מאלקטרון ופרוטון, אשר מהם התהוו הגלקסיות והכוכבים. כל אלו מסתובבים כיום או רוטטים בקצב אופייני משל עצמם. על הכוכבים אנחנו לומדים באמצעות הפירוק הספקטרלי של צבעיהם. לכל כוכב יש טביעת אצבעות האופיינית למארגי צבעיו. אבל למרות המגוון האין-סופי כמעט של האפשרויות היקום שלנו עדיין מסוים. צבע הצהוב קודם לאדום, ולא להפך. לפיכך עולה השאלה אם הייתה אפשרות אחרת לברוא את העולם , או אולי קיימים בעצם בריאות אחרות בהם חוקי הטבע הם אחרים לחלוטין. ואם כך האם המתמטיקה היא זו אשר יכולה לאחד את העולמות השונים.

צופן אוניברסלי

" גנתצי וחו וטמכצז למ בזא גבזא תסנקבא נסמכו. " טקסט זה נראה חסר מובן , אבל מדובר במשפט שהוצפן ככתב סתר על פי המפתח הבא: בכתיבת המשפט הזה החליפו כל אות באות שנמצאת מעליה. אנחנו יכולים לפענח את מה שכתוב במשפט ולגלות שכתוב בו. "במשפט הזה החליפו כל אות באות נמצאת מעליה" . המשפט הוא מפתח להבנת עצמו.



כאשר אנחנו מצפינים הודעה, אנו מעונינים שרק מי שההודעה מיועדת אליו יוכל לפענח ולקרוא את ההודעה. את הטקסט המקורי אנחנו משנים באמצעות מפתח מסוים, שידוע אך ורק לכותב או לקורא המיועד. אחת השיטות הפשוטות בהצפנה היא החלפת אותיות זו בזו באמצעות מפתח ידוע מראש, כלומר באמצעות איזו תמורה של אותיות. שיטה זו פשוטה יחסית לפיצוח, משום שכל אות יש לה שכיחות אופיינית, ובטקסט די ארוך ניתן לשחזר את האותיות המקוריות באמצעות שכיחותן היחסית. כל שיטת הצפנה מתבססת אם כך על מפתח ידוע מראש למשדר ולקולט. המשדר מעוות את ההודעה באמצעות המפתח, ואילו הקולט מפענח את ההודעה בחזרה באמצעות אותו מפתח.

כל מכונת הצפנה אלקטרונית מורכבת ממספר סופי של תאים n . בכל רגע נתון נמצאים כל התאים במצב מסוים של אפס או אחד. בפעימה הבאה כל תא מקבל ערך חדש בהתאם ל n פונקציות שונות. יוצא שיש בכלל

$2^{n\bullet 2^n}$ מכונות הצפנה סופיות ולפיכך צריך מפתח בגודל $n*2^n$ כדי להצפין את כל המכונות הסופיות בגודל n. אבל מאחר שמדובר במכונה שניתנת לבנייה באופן ממשי, כלומר קיים התקן אלקטרוני המגדיר אותה, מצטמצם מאוד מספר האפשרויות של מכונות ההצפנה. הרי כל ביט במכונה הוא רק פונקציה של מספר קטן , m , של ביטים מתוך המכונה, ומספר

המכונות הסופיות אם כך מצטמצם ל $2^{n*2^{m*\binom{n}{m}}}$.

מודל הצפנה אוניברסלי הוא מכונה, שהמפתח שלה מגדיר בעצמו מכונת הצפנה, ומעבר על כל המפתחות האפשריים יוצר מעבר על כל מכונות ההצפנה האפשריות. ניתן אם כך לבנות מודל הצפנה אוניברסלי שאפשר

לממש באמצעות מפתח יחסית סביר בגודל $n*2^{m*\binom{n}{m}}$ ספרות.

ניסיון המדע לנסח את חוקי הטבע שלפיהם פועל העולם, דומה לניסיון לפענח ולמצוא את המפתח של מכשיר הצפנה של היקום באמצעות זרם הנתונים הנגלה לעינינו. האדם מנסה לפענח את מכשיר ההצפנה שהוא היקום עצמו ואחר- כך הוא מנסה לשבור את המפתח כדי להבין את משמעות החיים עצמם. אך ההכרה שלא ניתן לעולם לנסח באופן סופי את חוקי הטבע, מביאה למסקנה שמודל ההצפנה של היקום אינו ניתן באופן עקרוני לפיצוח. אך דווקא ניסיון לבנות מודל הצפנה אוניברסלי דומה לאתגר לנסות לבנות מודל מקורב ליקום. תשובת היקום פרוסה ו באמצעות התופעות הנגלות ואנחנו צריכים ליצור, משפט שהוא מפתח להבנת עצמו.

צופן אני

אם מכפילים מספר בעצמו, מקבלים מספר חיובי. לכן נדרשו המתמטיקאים להרבה דמיון כדי להמציא מספר דמיוני, אשר כינו אותו i והוא שורש של -1 . ואם i כבר קיים בדמיוננו, וריבועו -1 , אפשר לחשב ש i בחזקה שלישית נותן מינוס i ואילו בחזקה רביעית זה שוב 1 . אפשר כבר לחשב ש 2i הוא שורש של -4 ואילו 3i הוא שורש ריבועי של -9 . כך ניתן לקבל שורשים של מספרים שליליים כלשהם.

מספר מרוכב הוא מספר מהצורה a+b i , כאשר a,b הם מספרים ממשיים ואילו i מייצג, כאמור , שורש של -1 . בין כל שני מספרים מרוכבים אפשר לבצע את פעולות החשבון שיש בין מספרים ממשיים. כלומר אפשר לחבר, להכפיל, לחלק ולחסר מספרים מרוכבים. אם הייצוג של מספרים ממשיים היה על קו ישר , אז את המספרים המרוכבים מייצגים כנקודות במישור הנקרא "מישור גאוס" לכבוד המתמטיקאי גאוס שתרם רבות לפיתוח תחום המספרים המרוכבים. ניתן גם להגדיר פונקציות מרוכבות ופונקציות מרוכבות גזירות שנקראות גם פונקציות אנליטיות.

אחד המשפטים החשובים בתחום של מספרים מרוכבים קובע שידיעה של פונקציה אנליטית בסביבה קטנה כרצוננו מגדירה את הפונקציה בכל התחום של המספרים המרוכבים. ובניסוח עדכני , מיקרו אשר מגדיר את המקרו.
i הולך עכשיו בין ספרי המתמטיקה ושואל את עצמו אם קיימת מהות אחת שאם נבין אותה אפילו בספר אחד, הרי נוכל להבין את שאר הספרים שנכתבו מאז ועד היום במתמטיקה. i חושב שאם אכן יש מהות כזו, היא צריכה להיות קשורה גם לתרגיל הפשוט ביותר הקיים במתמטיקה שהוא החישוב של 1+1. מוסכם הרי על כולנו שהתוצאה חייבת להיות 2 . אך מה זה אומר לנו עכשיו- שקיימת מעין הסכמה שכזו בין בני-אדם. האם ייתכן שהעובדה שני אנשים שונים שלכל אחד מהם יש i משל עצמו והם בכל זאת מסכימים בניהם על תוצאה אחת שהיא שתיים, מרמזת דווקא על כך שאין כאן שני i והוא ה i דווקא אחד הוא . כמו אוויר אחד שממלא שני בקבוקים שונים, והם שורקים כתוצאת "2 " או כל תוצאה מתמטית אחרת, אך רק מכוח צליליו של אוויר זה הם רק באשליה דמיונית שהם 2 . כמו הבזק הארה של שני פרחים המבינים פתאום שהם מאותו שורש א-ד-ם

אכן ייתכן הדבר, ואם אכן כך הדבר, איך ייתכן שדורות אחר דורות חשבו בני- האדם שהם נפרדים זה מזה? שצריכים הם להיאבק בעוצמה אלה מול אלה, שהם נדרשים למיין בני-האדם לפי גזע ומין? הרי נשמתם אחת היא, וממיתים הם בדמיונם גם את עצמם.

i זוכר את הערב שבו ישבתי כנער מעיין לי בספר אלגברה. דפדפתי בפרק על מספרים מרוכבים. אווירת מסתורין אפפה אותי כאשר קראתי לראשונה על דבר קיומם של מספרים דמיוניים. אותו מספר i שאם מכפילים בעצמו מקבלים -1 . i שאל את עצמו, איך בכלל ייתכן שמספר כפול עצמו יוצא מספר שלילי. i נרגש, רציתי לשתף מישהו בחוויה הזו. באותו הזמן נכנסה אימא שלי לחדר ובידה מגש עם שתייה וכיבוד. במבט לאחור i מבין כי מאחר שאימי איבדה את כל משפחתה בשואה, היא באה אז וגם היום וכך תמיד, לדאוג בשני מובני המילה. הסברתי לה על i הדמיוני והיא אכן שמחה מאוד גם לראות את i . ואם כתיבת רעיון זה מסתיימת, זה מפני שהתרגלתי לחשוב בהבזקי תמונות. כי הרי אמי אוהבת אותי מאד ודואגת לי הרבה, כך שבכל רגע היא יכולה להיכנס עם שתייה ומשהו, מתוק-מתוק.

פלא הפירמידה

בשנת 1900 בפריס הציג המתמטיקאי דויד הילברט 23 בעיות מתמטיות פתוחות שונות , אשר על-פי הבנתו הן מרכזיות לגבי התפתחות המתמטיקה בעתיד. שלושים עמודים מסכמים הרצאה של , שחושף את אשר הוא יודע, ומצביע על מה שעדיין הוא נשגב מבינתו. 23 בעיות פתוחות במתמטיקה שאין להן פתרון מסמנות לקהילת המתמטיקאים את ההתפתחות בעתיד של המתמטיקה. המאמר שאין בו כמעט נוסחאות, מרמז שאפשר לכתוב במילים ולהגיע בהן לדיוק מתמטי.

הבעיה הראשונה עוסקת במהות האין-סוף. קנטור גילה כי קיימות עוצמות שונות של אין-סוף שניתן להבחין ביניהן. השאלה ששאל קנטור ובעקבותיו הילברט, היא האם קיים אין-סוף ביניים בין אין-סוף המספרים הטבעיים 1,2,3,... לבין אין-סוף המספרים, אשר מכסים את כל רצף הקו הישר? אבל חולפות שישים שנה עד שפול כהן מראה כי שאלה זו אינה תלויה באכסיומות של תורת הקבוצות. אפשר להניח שיש ואפשר להניח שאין וזה לא יסתור את הנחות היסוד של תורת הקבוצות. הבעיה השנייה דנה בשאלה אם אפשר לבסס באופן שלם את תורת המספרים על מספר הנחות. המטרה הייתה להגיע לכך שכל טענה על מספרים ניתן יהיה להוכיח אותה או להוכיח את ההפך ממנה. גם בעיה זו נפתרה על- ידי המתמטיקאי קורט גדל, אשר הראה בשנות השלושים שתורת המספרים אינה יכולה אף פעם להיות שלמה, כי קיים תמיד משפט מתמטי אחד שאי-אפשר להוכיח אותו, אך גם לא את ההפך ממנו. הבעיה העשירית היא האם אפשר לנסח אלגוריתמים הקולט משוואה כנתון ומחליט אם למשוואה פתרונות במספרים שלמים, ניתנה תשובה שלילית בשנות השבעים .

הבעיה השלישית ברשימה הייתה למצוא שיטה לחישוב נפח של פירמידה. הנפח שווה לשטח הבסיס כפול הגובה כפול המקדם 1/3 . הילברט חיפש שיטה גאומטרית להוכיח את המקדם הזה. בדומה לדרך שבה מוכיחים את המקדם ½ בחישוב השטח של משולש. כאשר לוקחים משולש כלשהו ומצמידים אליו משולש זהה, נוצרת אז מקבילית. שטח המקבילית הזו הוא כפול מהשטח של המשולש הראשון. מהמקבילית הזו אפשר לגזור כעת שני משולשים חופפים, להדביקם שוב ולקבל מלבן השווה בשטחו לשטח של המקבילית. מאחר ששטח המלבן הוא אורך הבסיס כפול אורך הגובה, נובע ששטח המשולש הוא מחצית אורך בסיסו כפול גובהו.

אמנם לפני יותר מאלפיים שנים הוכיח ארכימדס שנפח פירמידה הוא שטח הבסיס כפול גובהה כפול 1/3 . הוא עשה זאת ע״י חלוקת הפירמידה לחלקים הולכים וקטנים ובדיקת הגבול אליו שואפים סכום השטחים. אבל השאלה כאן היא האם אפשר להוכיח את המקדם 1/3 ע״י חלוקת הפירמידה למספר סופי של חלקים והרכבתם מחדש לצורה שפשוט לחשב את נפחה.

הבעיה השלישית של הילברט נפתרה, והוכח שאין דרך גאומטרית להראות את המקדם של 1/3 באמצעות חלוקה סופית של הפירמידה. יחד עם בעיה זו נפתרו במהלך המאה רוב הבעיות, אשר אותן הציב הילברט בפני המתמטיקאים. אבל דומה שהבעיה העיקרית שממנה חשש לא נפתרה, ייתכן שאף הוחמרה, השאלה של אחדות המתמטיקה.

הילברט הדגיש בסיום ההרצאה שלו שהוא רואה במתמטיקה שלמות אורגנית אחת שאינה ניתנת לחלוקה. הוא חשש שבעתיד תתפצל המתמטיקה למספר רב של תחומים, שבהם יעסקו מתמטיקאים שלא יכירו זה את עבודתו של זה. לא רק הפתרון של 23 השאלות היה המטרה של הילברט בהרצאתו, אלא החיפוש אחר אותה האחדות האורגנית של המתמטיקה.

חיים תבוניים

פעמיים נקשר כוכב הלכת מאדים לחיפוש של בני האדם אחר חיים תבוניים. לראשונה בניסיון לפרש את תנועת הנסיגה של מאדים על רקע שמי הלילה ובשנית בזיהוי מוטעה של תעלות על פניו שנוצרו כביכול על-ידי תרבות אחרת. אך ייתכן שקיים קשר נוסף בין מאדים לחיפוש אחר חיים גם בשדה המתמטיקה.

כבר לפני שנים רבות הבחינו בני-אדם בתנועת הנסיגה של מאדים על רקע כוכבי השבת. מאדים מתקדם לאטו על רקע שמי הלילה בתנועה שניתן להבחין בה מדי לילה. הוא נע בכיוון מסוים, אך לפתע הוא נעצר ומתחיל לנוע דווקא בכיוון מנוגד. אחר- כך הוא נעצר שוב וחוזר לנוע בכיוון הרגיל של תנועתו. כדי להסביר את התנועה המוזרה, המציאו האסטרונומים מערכות מורכבות של גלגלים, אשר כדור הארץ ניצב במרכזן . המערכת המסובכת ביותר הייתה המערכת שהמציא תלמי, והיא כללה בתוכה 12 גלגלים. אך לפני כ 400 שנים הגה קופרניקוס רעיון נועז וחדשני ולפיו דווקא השמש היא במרכז העולם, ולא כדור הארץ. במקרה כזה ההסבר לתנועת המאדים נעשה פשוט יותר, והוא נובע מאינטראקציה שבין כדור הארץ למאדים.

כך החלה המהפכה המדעית שלוותה במאבקים קשים. אך ממשיכי קופרניקוס , גלילאו ואחר-כך ניוטון, ביססו את החשיבה המדעית באמצעות הפיתוח של מתמטיקה מתאימה. שיא של צורת החשיבה המדעית הביא במהלך המאה העשרים לפיתוחן של שתי תאוריות מרכזיות: תורת היחסות ותורת הקוונטים. שתי התורות הללו שינו את תפיסת האדם את עצמו בעולם. האדם אינו עוד צופה פסיבי בעולם התופעות, אלא יש לו חלק אקטיבי הנובע מהאינטראקציה הקיימת בינו לבין העולם.

האם ניתן להחיל עיקרון דומה גם בשדה ההגיוני של המתמטיקה? במבט ראשוני נראה שאין הדבר כך, משום שעולמה של המתמטיקה נראה מוחלט וקיים גם ללא אדם. מצד שני, אנו יודעים כי יש היום צורך לפתח ראייה מסוג חדש במתמטיקה, החותרת להבנה עמוקה יותר של הקשר בין המתמטיקה לעולם התופעות. דבר זה בא לידי ביטוי למשל בדברים שאמר המתמטיקאי אלן קונס אשר פיתח לפני כ- 20 שנים את הגיאומטריה הלא-חילופית, והוא נחשב כיום לאחד מחשובי המתמטיקאים בעולם. ״ אנחנו זקוקים היום להבנה חדשה במתמטיקה שהמקור שלה הוא לאו דווקא בלוגיקה הרגילה, אלא דווקא בגיאומטריה״ דברים אלו נאמרו בסוף ההרצאה שלו אשר חתמה את הכינוס ״100 מהילברט ״. כנס זה היה לציון ההרצאה המפורסמת של הילברט בפריס 1900.

התבוננות משותפת בשני הכנסים המתמטיים החשובים, האחד בפריס והשני בלוס-אנגלס במרווח של מאה שנים, מעלה את השאלה האם ובאיזה אופן נעה המתמטיקה בדומה למאדים על רקע שמי התרבות האנושית. כך מוצגת בעיה לא פתורה עדיין על מהות הקשר שמתקיים בין מתמטיקה לעולם הממשות. אך בדומה לאבחנתו של קופרניקוס המאפשרת להעמיד את השמש במרכז העולם וכך לפרש פשוט יותר את האינטראקציה שבין כדור הארץ למאדים, אפשר להצביע על הגורם השלישי אשר פותר את החידה המתמטית.

חיים תבוניים אשר המתבוננים במקביל הן בתופעות והן בתהליך היצירה המתמטית, חושפים את אותה מהות אורגנית של המתמטיקה.

המשפט האחרון

על גבי שולי ספר מתמטי כתב פרמה לפני כ- 350 שנים הערה, שהפכה עם הימים לבעיה המפורסמת ביותר במתמטיקה. אלפי מתמטיקאים ניסו להוכיח או לסתור את מה שפרמה כתב, אבל טען שלא היה לו די מקום להוכיח. אין פתרונות שלמים למשוואה כש n גדול מ 2 .

שני מתמטיקאים יפנים עסקו בשנות החמישים במחקרים של פונקציות מתמטיות המכונות משוואות אליפטיות ופונקציות מודולריות. שני התחומים הללו שונים לחלוטין, אבל הם התחילו לגלות קשר מוזר ביניהם. בעקבות גילויים אלו ניסחו שימורה וטימורה את ההשערה, שקיימת התאמה מלאה בין המבנים של פונקציות אליפטיות למבנים של פונקציות מודולריות. בתחילה לא נראה מדוע מתקיים קשר בין תחומים זרים לחלוטין, אך במהלך השנים גבר העניין של מתמטיקאים בהשערה.

בשנת 1986 הוכיח קן ריבט שנכונות ההשערה תגרור בעקבותיה את נכונות משפט פרמה. מתמטיקאי אנגלי בשם ויילס, שכבר מגיל 10 רצה להקדיש את עצמו לפתרון הבעיה המפורסמת של פרמה, שמע על כך. בכנס מתמטי שנערך בשנת 1993 הוא חשף לראשונה בציבור את ההוכחה של ההשערה, ומכאן את השלמת ההוכחה של השערת פרמה. הידיעה פשטה במהירות בקהילה המתמטית ועוררה התרגשות רבה. אמנם התגלתה טעות בהוכחה, אבל במאמץ עילאי הוא הצליח לסתום את החור שהתגלה בהוכחה. כך נסתם הגולל על הבעיה המפורסמת ביותר בתולדות המתמטיקה. שאלה שקיבלת את הכינוי , המשפט האחרון של פרמה. ".

כשנרגעות הרוחות סביב בעיה זו מטבע הדברים המבטים מופנים כעת לחפש אחרי בעיה חדשה, אשר יכולה להעסיק דורות רבים של מתמטיקאים.

במקום לחפש בעיה מתמטית שמנוסחת באופן שיגרתי, יש היום הזדמנות לנסות ולנסח בעיה שקשורה למתמטיקה עצמה. יש לכך כמה מועמדים :

- מדוע המתמטיקה שהיא יצירה בסמלים פועלת בעולם?
- מציאת פרשנות חיובית למשפטי גדל במקום הפרשנות השלילית כיום.
- יצירת מתמטיקה הלוקחת בחשבון שהאדם הוא בתוך העולם.
- חיפוש תורת מאחדת ליחסות וקוונטים.
- מחשבים מפיקים היום בעצמם משפטים מתמטיים.
- מציאת מהות אורגנית של המתמטיקה.
-

למרות שהבעיות המתמטיות הללו נראות נפרדות זו מזו, ייתכן בהחלט כי קיים קשר פנימי ביניהן. המתמטיקה נתפסת לרוב מצד התוצאות שלה, אבל לא מצד תהליך היצירה שלה. התבוננות רחבה יותר אשר לוקחת בחשבון גם את בני-האדם היוצרים את המתמטיקה, עשויה לתת מענה סביר לכל הבעיות אשר הוצגו קודם.

כדי להראות שזהו הפתרון הנדרש, יש צורך למצוא תאור חדש של המתמטיקה. תפיסה אחרת אשר אומרת כי ייחודה של המתמטיקה אינו בגילוי של אמיתות מוחלטות מחוץ לעולם, אלא צורה מיוחדת של עיסוק של האדם בסמלים. המציאות המתמטית היא כולה מציאות של סמלים כשלפעמים סמלים הופכים בפני עצמם לאובייקטים של התבוננות. בראייה זו כל סמל מתמטי גם מסמל משמעות של דבר מסוים, אבל גם משמש נגזרת של פעולה רחבה יותר. במובן זה ייתכן כי גילוי ההצגה החדשה של המתמטיקה דומה לצעד של ניוטון כשביסס מתמטיקה חדשה המתחשבת בקצב השינוי של פונקציות, ולא רק בערכן המוחלט. אם תתגלה הצגה כזו של כל הגילויים המתמטיים הידועים, נוכל לציין את המשפט של פרמה כנקודת מפנה חשובה בתולדות המתמטיקה. כך יסתבר בהתבוננות גלובלית דרכו על כל המתמטיקה ונבין גם מדוע כונה בשם, המשפט האחרון.

מאה מהילברט

אולם הכנס באוניברסיטת u.c.l.a היה מלא במאות מתמטיקאים מכל רחבי העולם, אשר עשו מאמץ להבין את המרצה העומד באותו רגע על הבמה ומרצה על חזון מתמטי למאה השנים הבאות. כל מרצה הציג שקפים או מצגות שהוכנו מראש בחדר עבודתו. כל הרצאה התחילה תמיד בזמן וארכה 60 דקות בדיוק. מאמץ אחיד של בני-אדם בניסיון להבין אותו חוט מחשבה של המרצה: מהם ההגדרות החדשות, הטענות המועלות וכיווני ההוכחות שמוצעות. בזמן העומד לרשותו, הדברים מובאים אך ורק בראשי פרקים.

כשההרצאה מסתיימת הקהל מוחא כפיים. אחר-כך נשמעת ברקע מוסיקה קלאסית, שמרוממת את המעמד של אותו רגע. קהל גדול מתחיל לצאת מהאולם, אחדים ניגשים למרצה לשאול שאלה או שתיים. התחילה ההפסקה שזמנה קצוב מראש. כל אחד נושא מסביב לצווארו מדבקה עם השם שלו ושם האוניברסיטה אשר אותה הוא מייצג.

מתמטיקאים נמצאים ליד מתקני השתייה של הקפה או המים הקרים. זהו המקום החדש של ההתכנסות, שהוא הפעם בלתי מתוכנן מראש. יש המעדיפים להישאר לבד עם מחשבותיהם, אך ייתכן שאין הדבר כך, כי הם רק מהססים לגשת אל מישהו שהיו רוצים להחליף אתו מחשבות ורגשות. אחרים מתחילים להסתודד זה בצד זה בזוגות, בשלשות או בקבוצות גדולות יותר. החלק חי של הכנס המתמטי מתחיל להתעורר, קיימת אפשרות להיפגש עם בני-אדם ועם מחשבותיהם בלי ההכרח להוכיח.

שני מתמטיקאים משוחחים זה עם זה על מתמטיקה, הם משמיעים קולות זה לזה, הם מניעים את ידיהם בקצב לא אחיד, הם מנידים מידי פעם את ראשיהם לסמן איזו הסכמה משותפת. באמצעות הדיאלוג המשותף הם יוצרים תמונה, שעליה הם יכולים להגיע להסכמה משותפת או לאי- הסכמה מוחלטת.

כך למשל, נוצר לפני אלפי שנים המספר 2 . אף אחד לא ראה את המספר. רק שני בני-אדם אשר היה להם החזון, הפכו אותו לתמונה ממשית באמצעות דיבור משותף. אחר-כך התגשם המספר 3 ואחר-כך כל המספרים וכו׳ וכך כל היצירה המתמטית המהווה התגשמות של חזון דמיוני משותף באמצעות דיאלוג. אמנם מקובל לחשוב כי מתמטיקה והדיבור עליה הם דברים שונים. אך קיימת נקודת מבט רחבה יותר, שיכולה לאחד את השפה של הדיוק המתמטי עם השפה והדיבור על מתמטיקאים היוצרים אותה.

לפני כ- 150 שנים המציא המתמטיקאי מביוס רצועה הנקראת כיום על שמו. מדובר ברצועה רגילה, אשר עושים כיפוף אחד לפני שמדביקים אותה. לרצועה הזו כמה תכונות מעניינות. למשל, אם חותכים אותה באמצע אין מקבלים רצועות נפרדות, אלא רצועה אחת ארוכה יותר. אחת התכונות החשובות של הרצועה היא העובדה שלרצועת מביוס אין שני צדדים, אלא רק צד אחד. על סמך הרעיון של רצועת מביוס הגה המתמטיקאי פליקס קליין את הרעיון שנקרא כיום "בקבוק קליין". שתי השפות, פנים וחוץ, מתמזגות במראה הגלובלי של הבקבוק לשפה מאחדת, שניתן לקיים אותה אך ורק בממד הרביעי.

לכנס שהיה ב U.C.L.A הגעתי עם דגם תלת-ממדי של "בקבוק קליין " שהשגתי בעיר אוקלנד ליד סן-פרנסיסקו. בתיק היו גם 100 עותקים של המאמר שכתבתי באנגלית "מתמטיקה אורגנית". לאחר כמה ימים הכרתי כמה מתמטיקאים ונתתי להם את המאמר. העניין שהם גילו בו עודד אותי לחלק במהלך שאר הימים של הכנס את כל 100 העותקים. התחלתי בניסוי מתמטי הבוחן את מהות הקשר בין התודעה המתמטית לעולם התופעות.

ברגע זה אשר בו מסתיימת מלאכת כתיבת הספר, נדמה כי בארצות - הברית בניסוי המחשבתי הזה הזה המשכתי בעצם את אותה קריאה מלפני 20 שנה, כאשר הייתי תלמיד בתיכון וצעקתי בכל רם בכיתה "נעליים".

בעיות מתוך הכרטיסיות שהכין עקיבא סקדל

במהלך שנות עבודתו כמחנך למתמטיקה.

1. מהו המספר הגדול ביותר שאפשר לכתוב בשלוש ספרות של 2.
2. נתונות שלוש נקודות לא על ישר אחד. כמה ישרים אפשר לצייר במרחק שווה מהנקודות?
3. 137 שחקנים הופיעו לתחרות טניס וסודרו זוגות-זוגות. אם מישהו נשאר בלי בן-זוג, הוא עובר לסיבוב הבא, כל מפסיד יוצא. כמה משחקים שיחקו בסך הכול?.
4. רושמים את המספרים מ 1 ועד 1000 , במעגל. מתחילים מ 1 ומסמנים כל מספר 15. , (1,16,31,...), עד שחוזרים למספר שכבר סומן. כמה מספרים בלתי מסומנים ישארו?
5. יש לחתוך לוח שחמט ל- 64 ריבועים קטנים. אסור לערבב או לסדר חתיכות זו ליד זו לחיתוך אחד מהו מספר החיתוכים המינימלי הדרוש לביצוע הדבר?
6. משנים-עשר גפרורים (כל גפרור יחידת אורך) צריך לבנות צורה הנדסית ששטחה ארבע יחידות ריבועיות.
7. רפסודה טעונה גרוטאות ברזל עוגנת במספנה סגורה כמו בריכה. הטילו את הגרוטאות למים. מה יקרה לגובה פני המים במספנה?
8. סדר את המספרים מ 1 עד 10 מסביב למעגל, כך שסכום כל שני מספרים סמוכים יהיה שווה לסכום שני המספרים שממולם.
9. מצא את כל זוגות המספרים (שלמים ושברים) שסכומם שווה למכפלתם.
10. אם תעמוד מול ראי מאונך, מה צריך להיות גודלו המינימלי של הראי כדי שתוכל לראות את עצמך במלוא קומתך?
11. בלוח 7X7 משבצות יש להציב ארבע לוחיות, כך שכל משבצת בלוח תהיה בשורה אחת לפחות עם אחת הלוחיות באורך, ברוחב או באלכסון.
12. מהו המספר הקטן ביותר המורכב כולו מהספרות 0 ו 1 והמתחלק ב 225 ?
13. בין המספרים מ 1 ועד 10,000,000,000 האם יש יותר מספרים שבהם תופיע הספרה 1 או יותר שבהם היא לא תופיע?
14. הוכח כי אי-אפשר לסדר את המספרים מ 1 עד 9 בריבוע 3 על 3 , כך שסכום כל זוג מספרים סמוכים יהיה מספר ראשוני.
15. גנב נכנס למטע וגנב תפוחים. בצאתו מהמטע הוא נתקל בשלושה שומרים בזה אחר זה. לכל אחד מהם הוא מסר את מחצית התפוחים שהיו בידיו ועוד 2 תפוחים. כשעבר את השומר השלישי נשאר בידי הגנב רק תפוח אחד. כמה תפוחים הוא גנב מלכתחילה.
16. האם כדאי או לא כדאי להמר שבהטלת זוג קוביות 24 פעמים יופיע זוג שישיות.
17. האם אפשר לסדר שלוש נקודות במישור במרחקים שווים זו מזו ?
18. האם אפשר לסדר ארבע נקודות במישור, כך שכל שתיים נמצאות באותו מרחק זו מזו?
19. בתחרות שחמט נערכו בסה"כ 63 קרבות. כל שחקן שיחק שלוש פעמים עם כל אחד מחבריו, כמה שחקנים השתתפו בתחרות?
20. מצא מספר ריבועי בן שלוש ספרות, שגם בהיפוך סדר ספרותיו מתקבל מספר ריבועי וגם סכום ספרותיו הוא מספר ריבועי.
21. כתוב מספר השווה ל- 32 באמצעות 4 ספרות של 5.

22. מהו המספר שאם נכפול אותו בעצמו נקבל מספר בעל שלוש ספרות רצופות לאו דווקא לפי הסדר?

23. גילי כיום כפליים מהגיל שהיית כאשר גילי היה בגילך היום. סכום גיל שנינו כעת הוא 63, מה הם גילנו ?

24. שעון-היד שלי מפגר ב- 10 שניות כל שעה ושעון הקיר שלי מקדים 10 שניות כל שעה. שניהם כוונו בצהרים של 1 בינואר מתי יורו שניהם את אותה שעה?

25. הזמן הדרוש לרכבת נוסעים לחלוף על פני רכבת משא, כששתיהן נוסעות באותו הכיוון, גדול פי שניים מהזמן כשהרכבות נוסעות בכיוונים הפוכים. מהו יחס המהירויות של שתי הרכבות?

26. איזה מספר בן שתי ספרות גדול פי שניים ממכפלת ספרותיו.?

27. בסדרה אין-סופית זו 9,98,987,9876,.,987654321,.,9876543219,.. כמה מספרים הם מספרים ראשוניים?

28. עליך לחלק את המספרים מ 1 ועד 15 לחמש קבוצות של שלושה מספרים כל אחד שסכומם זהה. כמה פתרונות יש לבעיה ?

29. האותיות I מתקדמות שמאלה, האותיות U מתקדמות ימינה. בין שתי השלשות יש מקום אחד. מהלך מותר הוא הליכה, או דילוג מעל אות אחת. המטרה להעביר את האותיות I מעבר ל U
UUU III .

30. על המעגל שבע נקודות. עליך להתחיל בנקודה כלשהי, לצעוד שני צעדים בכיוון כלשהו, מספר פעמים, ולסמן את הנקודה הסופית ב X. יש לחזור על תהליך זה כך שתישאר נקודה בלתי מסומנת אחת. אין להתחיל בנקודה המסומנת ב- X

31. יש לי מספר גולות משלושה צבעים, כולן פרט לשלוש, הן אדומות, כולן פרט לשלוש הן כחולות, כולן, פרט לשתיים הן ירוקות. כמה גולות יש לי?

32. קנדי נולד ב - 1917 נבחר לנשיא ב- 1960 כשהיה בן 46, שירת שלוש שנים יחד זה יוצא 3926. בן גוריון נולד ב 1886 נבחר לראש ממשלה ב 1948 כשהיה בן 77 , שירת 15 שנים ביחד זה יוצא 3926 . איך זה ייתכן ?

33. "**המשפט הזה הוא בן שש מילים**" זהו משפט אמיתי. בדרך-כלל משפט האומר את ההפך ממשפט אמת הוא שקרי. מהו משפט האומר את ההפך מהמשפט הנ"ל והוא אמת?

34. ספרתי על האצבעות הלוך ושוב, החל מהאגודל. באיזו אצבע עמדתי, אם המשכתי לספור עד 1962?

35. צריך לסדר את שמונת כלי השחמט (בלי החיילים), כך שיתקיפו מספר מינימלי של משבצות.

36. במשחק טניס מנצח מי שזוכה הראשון בשלוש מערכות. גד ודן, שני שחקנים שווים בהחלט, התחילו במשחק ולמנצח הובטח פרס של 60 ש"ח אולם המשחק הופסק באמצע במצב 1:2 לטובת גד. הוחלט לחלק את הפרס. מהי החלוקה הצודקת.?

37. כדי להזיז ארון כבד שמו אותו על שני גלילים. היקף כל גליל 10 ס"מ, בכמה יוזז הארון, כאשר כל גליל ישלים סיבוב אחד?

38. יש לי מרצפות בצורת משולש שווה-צלעות. מספר המרצפות מספיק בדיוק לסידור משושה משוכלל, אך לסידור משולש שווה - צלעות חסרה לי מרצפת אחת. כמה מרצפות יש לי?.

39. מצא ארבע משקלות שבאמצעותן אפשר לשקול במאזניים כל גוף שמשקלו בין 1 גרם ל 40 גרם.

40. מהספרות 1,2,3,4,5,6,7,8,9 הרכב שני מספרים, שמכפלתם תהיה הגדולה ביותר (אסור להשתמש בספרה אחת פעמיים).

41. הלכתי חמישה ק"מ דרומה, חמישה ק"מ מזרחה, חמישה ק"מ צפונה והגעתי למקום שממנו יצאתי. איפה הייתי בהתחלה?.

42. מה הם שלושת המספרים העוקבים שמכפלתם שווה לסכומם?.

43. בפינת לוח שחמט ניצב צריח, האם אפשר להגיע אתו לפינה ממול ובדרך לעבור על כל המשבצות פעם אחת בלבד?

44. אם תכתוב את כל המספרים השלמים מ- 1 ועד 1,000 (ועד בכלל) ותשמיט מתוכם את כל אלה המכילים את הספרות 7,8,9 , כמה מספרים יישארו?

45. אב גדול מבנו 27 שנים. בעוד שלשו שנים יהיה גילו פי 13 מגיל הבן. איפה נמצאת האימא?

46. נניח שבשק ישנם עשרה זוגות גרביים לבנים ושמונה זוגות גרביים כחולים כמה זוגות גרביים עליך להוציא כדי שתהיה בטוח שהוצאת זוג.?

47. במחנה צבאי בצורת ריבוע בעל שטח של דונם אחד השתמשו בעשרה סלילים גדולים של תיל לגדר. למחנה שני אף הוא בצורת ריבוע הביאו 20 סלילים לאותה מטרה, מהו שטח המחנה השני?

48. פלוני עולה על הר במהירות ממוצעת של ק"מ וחצי לשעה ויורד במהירות של 41/2 ק"מ לשעה. העלייה והירידה יחד נמשכו ארבע שעות. מהו המרחק מרגל ההר ועד ראשו .

49. איך תחלק שבע ככרות לחם בין 12 ילדים, חלק שווה לכל ילד, בלי לחלק אף ככר ל- 12 חלקים?

50. במשפחה שני ילדים. ידוע שהבכור הוא בן. מהי ההסתברות ששניהם בנים?

51. במשפחה שני ילדים ידוע שאחד מהם הוא בן. מהי ההסתברות ששניהם בנים?

52. יש שישה חלקי שרשרת, ולכל חלק ארבע טבעות. אני יכול לפתוח כל טבעת בשתי דקות ולהלחים אותה בחזרה במשך חמש דקות. מהו הזמן הקצר ביותר אשר אוכל בו לעשות ליצור מכל החלקים שרשרת אחת?

53. אורכי צלעות המשולש הם שלשה מספרים עוקבים. היקף המשולש הוא 84 ס"מ. חשב את צלעותיו.

54. מהו פס הנייר הקצר ביותר (ביחס לרוחבו), שאפשר לקפל לקובייה (בגודל הרוחב)?

55. חלק את המספר 8 לארבעה מספרים (לאו דווקא שלמים), כך שבאמצעות צירופם בחיבור או בחיסור תוכל לקבל כל אחד מהמספרים מ 1 ועד 8 .

56. התוכל להחזיק בקצות ממחטה ולעשות קשר בלי להרפות מהקצוות.

57. סדר את ארבע הספרות 9 9 9 9 , באופן שהתוצאה תהיה 100 מותר להשתמש בכל פעולות החשבון.

58. צריך לקבל את המספר 1,000 משמונה ספרות של 8 בעזרת פעולות חיבור בלבד.

59. מצא מרכז של מעגל נתון באמצעות כרטיס מלבני ועיפרון.

60. לפני הרבה שנים הייתה עיר, שנהגה מנהג אכזרי בכל זר שבא בשעריה. שאלו אותו שאלה, ואם הוא אמר דבר אמת - היו הורגים אותו בחרב. ואם אמר דבר שקר- היו תולים אותו על עץ. רק אדם אחד, מספרת האגדה, הצליח להציל את נפשו, איך ?

נר שמיני

שבעה נרות למתמטיקה
נר התועלת
נר ההדר
נר הדמיון
נר השירה
נר הסוד
נר האין-סוף
ונר האמונה.

כאן בקריית השמונה
התגלה שקיים נר נוסף
עלום ונסתר
הוא נר האחדות.

וכדי שנר זה יאיר
נצטרך לעמול יחדיו
שתושלם הקפת השמש
ושמונה הנרות יאירו חנוכייה.